Juegos que pueden colaborar en el trabajo en torno al cálculo mental – Área Matemática

MATERIAL PARA EL DOCENTE
Mejorar los aprendizajes

Versión Preliminar

Subsecretaría de Educación
Dirección Provincial de Educacion Primaria
Dirección de Gestión Curricular

Dirección General de Cultura y Educación
Buenos Aires LA PROVINCIA

Índice

Juegos que pueden colaborar en el trabajo en torno al cálculo mental[1]

Introducción

El presente material forma parte de un conjunto de documentos publicados, por esta Dirección, con el objetivo de apoyar el trabajo de los docentes en la enseñanza del cálculo mental con números naturales.

Esta serie también incluye los siguientes documentos: "Cálculo mental y algorítmico", "Cálculo mental de sumas y restas. Propuestas para trabajar en el aula" y "Cálculo mental. Propuestas para trabajar en el aula: multiplicación y división".

Algunas reflexiones acerca de los juegos en la clase de matemática

Partimos de entender a la clase de matemática como un espacio privilegiado para que los alumnos produzcan ideas a partir de las que ya disponen. Concebimos el trabajo matemático en la clase como una construcción colectiva (Sadovsky, 2005) que puede promoverse ofreciendo a los estudiantes oportunidades para resolver distintos problemas que permitan ampliar el uso de los conocimientos que ya tienen, considerar distintas maneras de resolverlos, generar momentos para comunicarlos, discutirlos y analizarlos.

Para que todo esto sea posible es necesario generar ciertas condiciones para la tarea y creemos que es ésta una de las responsabilidades que la enseñanza debe asumir.

Un trabajo de esta naturaleza, sostenido y organizado, puede contribuir entre otras cosas, a que los alumnos establezcan cada vez más relaciones numéricas. Esto constituye una de las razones por las que sería deseable involucrar a los niños en una práctica fundada en la exploración, en la discusión y en la reflexión. En este proceso, el docente tiene un papel singular porque es quien selecciona y adecua los tipos de problemas que va a proponer, piensa cómo los va a presentar, imagina qué tipo de interacciones va a promover entre los alumnos, cómo va a intervenir, etcétera[2].

---

[1] Autoras: Patricia García y María Mónica Becerril. Lectura crítica: Héctor Ponce. Coordinación: Andrea Novembre. Equipo técnico: Andrea Novembre (coord.), María Mónica Becerril, Teresita Chelle, Patricia García, Héctor Ponce, Gloria Robalo, Inés Sancha, María Cecilia Wall.

[2] Recomendamos la lectura del documento: "Cálculo Mental y Algorítmico" DGCyE Pcia. De Bs As., DPEP (2009).Disponible en el *Portal abc*, dentro del sitio web de la Dirección Provincial de Educación Primaria: www.abc.gov.ar/lainstitucion/sistemaeducativo/educprimaria/default.cfm

Desde esta perspectiva, entendemos "el juego" en el aula como una herramienta que puede constituirse en fuente de nuevos problemas, lo que puede favorecer el desarrollo de conocimientos matemáticos en los alumnos. En palabras de Bernard Charlot[3]:

> *"Si por juego se designa una actividad donde el alumno realiza con placer - que no excluye el esfuerzo, sino que lo sostiene-, una actividad que permite un funcionamiento del pensamiento no condicionado por reglas exteriores vividas por el alumno como artificiales y arbitrarias, no tengo ninguna objeción. ¡Además el alumno tiene derecho a que su actividad sea socialmente reconocida como un trabajo serio y no como un juego y se engañe a ciertos alumnos con la idea de que ellos juegan en la escuela en vez de trabajar!*
>
> *Pero si por juego matemático, se designa una actividad puntual no articulada alrededor de un campo de problemas, no anclado en el programa, sin proyecto intelectual ni institucional, ya no estoy de acuerdo*."

Es decir, es importante que los juegos que se proponen para trabajar en el aula tengan un claro objetivo de enseñanza para el docente. En este sentido, los juegos se pueden constituir en un fuerte sostén de las situaciones de enseñanza planificadas, siempre y cuando estén a disposición del aprendizaje y no de la simple acción de jugar.

El juego tiene la cualidad de convocar a los alumnos, y para que se transforme en contexto para el aprendizaje es necesario que se consideren ciertas condiciones, entre ellas que al finalizar el momento del juego se proponga un momento para el debate acerca de los procedimientos utilizados durante el desarrollo del mismo.

También será interesante que el maestro invite a los alumnos a jugar nuevamente pero analizando por qué las estrategias sirven para ese juego y que identifiquen qué condiciones tiene la situación planteada que hace que sea posible la utilización de esas estrategias.

En este sentido, es necesario organizar un momento específico para la confrontación, explicitación, discusión y síntesis de los diferentes procedimientos que permitan analizar su pertinencia y eficacia.

Dependiendo del tipo de juego, el docente podrá organizar, por ejemplo, una discusión alrededor de las siguientes cuestiones:

---

[3] Charlot B. La epistemología implícita en las prácticas de enseñanza de las matemáticas, *conferencia dictada en Cannes, marzo 1986.* Faire des Mathématiques: le plaisir du sens, cuyos autores son R. Bkouche, B. Charlot, N. Rouche.

- ¿en qué consiste el juego?
- ¿qué hay que lograr para ganar?
- ¿qué estrategias se utilizan para jugar?
- ¿todas las estrategias sirven?
- ¿qué habría que saber para poder jugar?
- ¿qué cuestiones matemáticas aprenden con este juego?

Finalmente, se podrán anotar en el pizarrón o en un afiche las ideas más relevantes que los alumnos elaboraron a partir del debate. Por ejemplo, en el caso de juegos referidos al cálculo mental: cómo conviene pensar los números para que sea más fácil hacer la cuenta, qué estrategias transforman un cálculo en otro más sencillo o más corto, cuáles son los errores más frecuentes y qué hay que saber para remediarlos.

Otra posible actividad es registrar en los cuadernos las conclusiones intermedias o finales que surjan a partir de cada juego. De este modo, los niños podrán recurrir a ellas para buscar información y para estudiar.

Una de las características del juego es que permite separar la finalidad de los niños (ganar el juego) de la intencionalidad del maestro (enseñar cierto conocimiento que resulta necesario para ganar). La existencia de esta distancia entre ambos objetivos brinda muy buenas condiciones para que los alumnos tomen a su cargo las razones de los procedimientos que emplean y de las estrategias que rechazan o abandonan a favor de alguna economía o de cierta eficacia.

A partir del proyecto institucional, es deseable que los docentes discutan la pertinencia de los juegos propuestos adecuándolos a los contenidos a enseñar y a las características de cada grupo de alumnos.

Es necesario que esta tarea de adecuación se realice sin perder de vista que a través del juego también se pretende instalar un tipo de práctica que permita al alumno aprender matemática haciendo matemática. Concebir la enseñanza de la matemática desde esta perspectiva supone que se generen condiciones en el aula para que los alumnos aprendan a explorar, transformar, anticipar, argumentar, representar, conjeturar, replicar, extender, buscar relaciones , establecer condiciones, generalizar, etcétera.

El juego puede colaborar en el trabajo en torno al cálculo mental

El cálculo mental[4] , en tanto cálculo reflexionado, constituye un dominio fértil para instalar una práctica que apunte no sólo a que los alumnos pongan en juego los conocimientos disponibles sobre los números y las operaciones, sino también para que aprendan a tomar decisiones y a ejercer el control sobre lo que están realizando.[5]

Con relación a las estrategias de cálculo como objeto de enseñanza, el Diseño Curricular establece:

> "*en el transcurso del segundo ciclo, y también como parte del proceso de construcción del sentido de las operaciones, es deseable que los alumnos logren desplegar diversas estrategias al resolver un cálculo teniendo en cuenta la situación y los números involucrados y que puedan controlar los resultados obtenidos*"[6].

Ahora bien, para que el alumno logre cierto "control" sobre los resultados de los cálculos y disponga de ciertas estrategias de cálculo mental será necesario generar condiciones de trabajo en el aula que promuevan su exploración y su elaboración. En este sentido, a través de los juegos que se incluyen en este material, se pretende favorecer el despliegue de estrategias personales de cálculo mental.

Los juegos que aquí se presentan no se organizaron de manera secuenciada. Por lo tanto, adecuarlos a las necesidades de cada aula será una tarea a asumir por cada maestro. En la mayoría de los casos, los juegos pueden ser modificados en su nivel de complejidad si se varía el intervalo, la redondez o el conjunto numérico en el que se desarrolla la actividad.

El diseño, la selección, la adecuación y la preparación de los materiales para los juegos requiere tiempo y esfuerzo. Sería deseable trabajar de manera colaborativa entre los docentes de la institución de manera de planificar la preparación de los materiales. Esto permite enriquecer la tarea diaria y disponer de una colección de juegos que pueda ser utilizada por varios grupos de alumnos y docentes.

---

[4] Entendemos por Cálculo Mental al conjunto de procedimientos que, analizando los datos por tratar, se articulan sin recurrir a un algoritmo pre-establecido para obtener resultados exactos o aproximados.

[5] Recomendamos la lectura del documento "Cálculo Mental y Algorítmico" , DGCyE Pcia. De Bs As., DPEP, 2009.Disponible en el *Portal abc*, dentro del sitio web de la Dirección Provincial de Educación Primaria: www.abc.gov.ar/lainstitucion/sistemaeducativo/educprimaria/default.cfm

[6] Dirección Provincial de Educación Primaria. Pcia. de Bs. As. "Diseño Curricular para la Educación Primaria". Segundo Ciclo. 2008. Página 154. Disponible en el *Portal abc:* www.abc.gov.ar

PRIMERA PARTE

Ejemplos de juegos que colaboran con la construcción de cierto repertorio[7] aditivo

Sabemos que para comprender y usar las cuatro operaciones elementales se requieren largos procesos de trabajo. Se hace necesario proponer un tipo de tarea que contribuya a construir el sentido de las operaciones tanto como promover un trabajo destinado a cálculo mental.

A continuación presentamos algunos ejemplos de juegos que colaboran en la elaboración y consolidación del repertorio aditivo.

<u>Sumas que dan 10</u>

¿Por qué trabajar sumas que dan 10?

Disponer de un repertorio memorizado de sumas cuyo resultado es 10 permite realizar esos cálculos con relativa rapidez y facilidad, al mismo tiempo que es un punto de apoyo importante para resolver otros más complejos. Conocer el resultado de ciertas sumas y restas es una herramienta potente para transformar un cálculo “difícil” en otro sobre el que ya se tiene cierto control.

Por ejemplo:

Para calcular sumas

7 + 4 puede transformarse en
7 + 3 + 1, que es
10 + 1 = 11.

Saber que 7 + 3 = 10 es un punto de apoyo para saber que 7 + 4 = 11.

Para calcular restas

11 – 4 se puede transformar en
11 – 1 – 3, que es

[7] Llamamos repertorio aditivo a la colección de sumas y restas que los niños van aprendiendo progresivamente y que tienen disponible en memoria para su aplicación. DGCyE Pcia. De Bs As., DPEP (2009): “Cálculo mental de sumas y restas. Propuestas para trabajar en el aula”. Disponible en el *Portal abc*, dentro del sitio web de la Dirección Provincial de Educación Primaria: www.abc.gov.ar/lainstitucion/sistemaeducativo/educprimaria/default.cfm

10 – 3 = 7

En este caso, saber que 10 + 1 = 11 ayuda para saber que 11 – 1 = 10.

Para calcular sumas o restas de decenas o centenas enteras

Por ejemplo:

Si 7 + 3 es 10, entonces 70 + 30 es 100,
puede interpretarse como 7 dieces más 3 dieces, que son 10 dieces y 10 dieces es 100.
100 – 70 es 30,
puede interpretarse como 10 dieces menos 7 dieces, que son 3 dieces, 30.
700 + 300 es 1000
porque 7 cienes más 3 cienes son 10 cienes, o sea mil.

Juego 1 – Guerra del 10

Objetivo del juego: reconocer pares de números naturales que suman 10.

Materiales: un mazo de cartas españolas del 1 al 9.

Organización de la clase: la clase se divide en parejas.

Reglas del juego: se mezclan las cartas y se reparten todas equitativamente entre los dos jugadores, quienes las apilarán boca abajo. En cada jugada, los jugadores muestran una carta al mismo tiempo. Si las cartas suman 10, gana el primer jugador que cante 10 y se lleva las dos cartas. Si las cartas no suman diez las dejan sobre la mesa y vuelven a jugar. Se continúa jugando hasta que se terminen de mostrar todas las cartas o alguno de los jugadores no tenga más cartas. Gana el que logra juntar más cartas.

Comentarios: antes de empezar a jugar, el maestro explica las reglas del juego. Si fuera necesario, puede por ejemplo, jugar con un alumno dos manos a la vista de toda la clase para asegurarse que todos entienden cómo se juega. Es importante tener en cuenta que los comentarios del maestro en este momento están centrados en explicar las reglas del juego pero sin hacer referencia a qué estrategias es posible desplegar para saber qué pares de cartas suman 10.

Otra posibilidad consiste en dejarlos jugar al menos dos manos, con la intención de poder observar cómo lo hacen y si fuera necesario, interrumpir para aclarar las reglas que fueran necesarias.

Posible secuencia de trabajo con el juego de la guerra

Primer momento:

Los alumnos jugarán un partido completo. Mientras juegan, el docente recorre los grupos registrando los cálculos que surgen, reteniendo los procedimientos que despliegan y seleccionando aquellos que quiere destacar ante toda la clase.

Después de jugar, en el espacio colectivo de la clase, el maestro puede iniciar la discusión a partir de, por ejemplo, la siguiente actividad.

Se representan en el pizarrón varias parejas de cartas:

2	**7**
3	**9**
4	**6**
8	**1**
4	**4**
5	**5**
7	**3**
9	**1**
5	**8**

El maestro pide a los alumnos identificar las parejas de cartas con las que se puede cantar 10 durante el juego.

¿Qué se espera lograr con los alumnos a partir de esta actividad?

Al no disponer de resultados memorizados, es posible que los alumnos cuenten los bastos de cada carta comenzando desde 1, o bien cuenten a partir del número de una de las dos cartas, por ejemplo, en el caso de 7 y 3 es posible que sobrecuenten a partir del 7 (8, 9,10). A partir de esta constatación, además, pueden desestimar 7 y 2 y también 3 y 9. Ésta es una propiedad que los alumnos muchas veces ponen en juego de manera implícita y que los docentes puedan explicitar en el espacio colectivo. Una forma posible sería:

“Si ya sabemos que 7 y 3 suman 10, entonces 7 no puede sumar 10 con ningún otro número que no sea 3”.

Del mismo modo:

“3 no puede sumar 10 con ningún otro número que no sea 7”.

Es decir, saber cuáles son las sumas que dan 10 permite también saber cuáles no dan 10.

Sabemos que las sumas en las que se agrega 1 son más fáciles de memorizar que otras, por lo tanto se espera que les resulten más sencillas, como por ejemplo para 9 y 1. Esta identificación puede llevar a desestimar otras parejas que tengan un 9, porque con el 9 ya saben que va el 1, entonces el 9 no va a sumar 10 con ninguna otra carta. Es interesante proponer analizar por qué al sumar 9 con cualquier otro número que no sea 1, el resultado siempre va a ser más que 10[8].

Es posible que algunos niños ya dispongan de algún resultado memorizado. Por ejemplo, la suma 5 + 5. Usando este conocimiento pueden proponer, por ejemplo, que 4 y 6 también dan 10, porque el 1 que le falta a 4 para llegar a 5 lo tiene el 6, que es 1 más que 5.

Esta estrategia de compensación también es útil para decidir, por ejemplo, sobre 7 y 3 ya que los 2 que le faltan a 3 para llegar a 5 los tiene el 7 y 7 es 2 más que 5.

Al finalizar el debate colectivo se puede hacer un cartel con los pares de cartas que ya no se necesitan contar, aunque no estén todos los pares en las primeras rondas. En sucesivas partidas se podrán ir agregando otros pares, como así también se podrán incorporar nuevas conclusiones, como por ejemplo: las cartas 9 y 1 y 1 y 9 dan el mismo resultado, el 3 solo suma 10 si hay un 7.

Segundo momento:

En este momento, la intención es que los alumnos utilicen y sistematicen las estrategias que desarrollaron durante el juego en situaciones similares pero sin jugar.

---

[8] Estos resultados son, obviamente, provisorios ya que al cambiar el conjunto numérico las respuestas también cambian. Por ejemplo, $9 + \frac{1}{2}$ no es mayor que 10.

Se unen dos parejas y entre los cuatro realizan la siguiente actividad, sin las cartas.

Consigna para los alumnos: armen un listado con pares de números que sumen 10.

Tercer momento:

En el espacio colectivo de la clase se ponen en común las producciones, se analizan y se discuten.

El tipo de procedimientos que pongan en juego los alumnos va a depender de muchísimos factores. Se esperan procedimientos de distinta naturaleza:

- Contar a partir de un número hasta llegar a 10.
- Descontar a partir de 10.
- Utilizar resultados memorizados.
- Utilizar recursos de compensación.

A partir de los intercambios que se realicen, se espera establecer de manera colectiva una lista organizada, en un afiche, para ser reutilizada en las situaciones pertinentes. Por ejemplo:

5 + 5 = 10	
9 +1 = 10	**1 + 9 = 10**
8 + 2 =10	**2 + 8 = 10**
7 + 3 = 10	**3 + 7 = 10**
6 + 4 = 10	**4 + 6 = 10**

El análisis de los diferentes procedimientos propuestos ayuda a gestar formas de hacer más fáciles los cálculos que antes resultaban difíciles, ayudándose con cálculos mentales que ahora están disponibles, relacionando cálculos nuevos con cálculos conocidos, etcétera.

Es esperable que los niños reconozcan las ventajas de memorizar las sumas para poder cantar 10 y ganar con más rapidez, frente a recursos más asociados al conteo. Es importante tener en cuenta que: *"se memoriza mejor aquello que se comprendió, lo que tiene sentido para uno"*[9].

[9] ERMEL Apprentisages numériques et résolution de problémes. Course prèparatoire HATIER, 1991.

Cuarto momento

Con la intención de ofrecer a los alumnos la posibilidad de reutilizar los conocimientos elaborados, favoreciendo así un trabajo de memorización de repertorios y reglas[10], es que se propone en esta instancia resolver la siguiente actividad que se muestra a modo de ejemplo:

- En cada caso pongan una cruz en el casillero que corresponde.

		En esta mano no se canta 10	En esta mano se canta 10
4	7		
4	6		
8	3		

- Se propone completar un cuadro donde se supone que sale una carta determinada y se pide a los alumnos responder la pregunta formulada en la columna de la derecha.

Si en una carta sale	¿Qué tiene que salir en la otra carta para que se cante 10?
3	
4	
2	

Si en una carta sale	¿Qué puede salir en la otra carta para que no se cante 10?
5	
7	
6	

- Se representan en el pizarrón posibles jugadas (como se muestra a continuación, en el cuadro) y se pide a los alumnos completar las columnas vacías con una marca.

Carta	Carta	Con estas cartas no se llega a 10	Con estas cartas me paso de 10
4	7		

[10] Consideramos que las reglas tienen que ser construidas de modo que los alumnos comprendan por qué funcionan. Luego, podrán usarlas sin tener que pensar cada vez en las razones que le dieron origen.

5	**3**		
8	**4**		

Carta	Carta	Con estas cartas falta justo 1 para llegar a 10	Con estas cartas me paso de 10
3	**8**		
2	**6**		
2	**9**		

Juego 2 – ¿Qué sumas dan 10?

Objetivo del juego: ayudar a construir un repertorio de cálculos memorizados.

Organización de la clase: la clase se organiza en grupos.

Reglas del juego: el maestro escribe en el pizarrón un cuadro con diferentes sumas, como por ejemplo el siguiente:

6+1	**10+0**	**7+3**	**5+6**	**9+2**	**9+1**	**4+5**
2+8	**6+5**	**6+3**	**4+6**	**4+4**	**5+5**	**3+7**

Ajustar la cantidad de sumas del cuadro a la cantidad de grupos que se armen, de modo que todos los grupos tengan al menos una para tachar.

Por turno un representante de cada grupo debe pasar y tachar una suma del cuadro que dé 10. Si realiza bien lo solicitado, su grupo se anota un punto, de lo contrario pierde un turno. Se termina el juego cuando no haya más sumas con resultado 10 por tachar. El ganador es el grupo con mayor cantidad de puntos.

Comentarios: para poder participar de este juego es necesario que los niños reconozcan las escrituras aditivas, a diferencia de la Guerra del 10 (Juego 1).

Juego 3 – Sumados dan 10

Objetivos del juego: reutilizar y consolidar el repertorio de cálculos memorizados.

Organización de la clase: organizados como en el juego anterior, el maestro dibuja en el pizarrón una tabla como la que sigue y reparte una igual a cada equipo:

5	8	3
2	7	4
6	4	5

Reglas del juego: se jugarán cinco rondas. A cada ronda le corresponde un cuadro de números distinto (ver ejemplo).

En cada ronda los niños deben tachar todos los pares de números que suman 10 y decir el número que queda sin tachar en el cuadro. El grupo que lo resuelve primero levanta la mano y canta el número que queda sin compañero. Si la solución es correcta, el grupo se anota un punto. Si no es correcta le toca el turno al grupo que levantó la mano en segundo término.

Por ejemplo, en la tabla que mostramos a continuación se tacharon con el mismo color los pares de números que sumados dan 10. Aquí se termina la ronda y el número que se canta es 4.

5	8	3
2	7	4
6	4	5

Juego 4 – La escoba del 10

Objetivo del juego: que los niños establezcan relaciones entre sumas y restas.

Materiales: un mazo de cartas españolas sin las figuras.

Organización de la clase: se divide en grupos de cuatro alumnos.

Reglas del juego: se juega de la misma manera que en la escoba del 15, pero se levantan las cartas que suman 10.

El juego de la escoba se basa en hacer grupos de cartas que sumen 10 puntos. Cada carta tiene el valor del número que representa. Se comienza repartiendo tres cartas para cada uno de los jugadores, se colocan sobre la mesa cuatro cartas de cara a todos y el resto del mazo boca abajo, al costado.

Por turnos cada alumno intentará reunir la mayor cantidad de cartas de la mesa con una de las que tiene a fin de sumar 10. Cuando se levantan todas las cartas de la mesa se hace escoba. En el caso en el que no haya cartas en la mesa el jugador se ve en la necesidad de elegir una de sus cartas y descartarse. Una vez jugadas las tres cartas de cada jugador, repartidas inicialmente, se reparten tres cartas nuevamente a cada participante, en el mismo orden que lo hizo al principio pero sin colocar cartas sobre la mesa, a continuación se juega de la misma manera hasta finalizar el mazo. Una vez terminado el juego hay que hacer un recuento de puntos para ver quién gana.

Los puntos se asignan de la siguiente manera:

1 punto por cada escoba.
1 punto al que tiene más cartas.

Complementos al número redondo inmediato superior

Buscar el complemento de un número se constituye en un recurso potente a la hora de pensar cómo resolver ciertos cálculos[11]. Es por esta razón que consideramos relevante proponer actividades específicas que permitan garantizar su dominio por parte de los alumnos.

Analicemos algunos procedimientos en los que se ponen en juego los recursos mencionados:

[11] Para profundizar estas cuestiones recomendamos la lectura del documento: "Cálculo mental. Propuestas para trabajar en el aula: sumas y restas", DGCyE Pcia. De Bs As., DPEP, 2009. Disponible en el *Portal abc*, dentro del sitio web de la Dirección Provincial de Educación Primaria: www.abc.gov.ar/lainstitucion/sistemaeducativo/educprimaria/default.cfm

- 47 + 5, por ejemplo, puede transformarse en 47 + 3 + 2, usando la descomposición del 5 como 3 + 2. En este caso la descomposición se apoya en el pasaje al número redondo inmediato superior a 47, que es 50. Entonces:

$$
\begin{aligned}
47 + 5 &= 47 + 3 + 2 \\
&= 50 + 2 \\
&= 52
\end{aligned}
$$

también puede resolverse de la siguiente manera:

$$47 + 5 = 50 + 5 – 3$$

Al escribir 50 en lugar de 47 es necesario restar 3, pues 50 es 3 más que 47.

- 38 + 15 puede transformarse, por ejemplo, en 38 + 2 + 13, transformando el 15 en 2 + 13. En este caso la descomposición se apoya en el número redondo inmediato superior a 38, que es 40. Entonces:

$$
\begin{aligned}
38 + 15 &= 38 + 2 + 13 \\
&= 40 + 13 \\
&= 40 + 10 + 3 \\
&= 53
\end{aligned}
$$

38 + 15, también se podría resolver de la siguiente manera:

38 + 15 = 40 + 15 – 2, al escribir 40 en lugar de 38 es necesario restar 2 pues 40 es 2 más que 38.

- 54 + 27 puede transformarse en 54 + 6 + 21, transformando el 27 en 6 + 21. En este caso la transformación se apoya en el pasaje de 54 al número redondo inmediato superior que es 60. Entonces:

$$
\begin{aligned}
54 + 27 &= 54 + 6 + 21 \\
&= 81
\end{aligned}
$$

54 + 27 también puede transformarse en 54 + 30 – 3, reemplazando el 27 por 30 – 3. Entonces:

$$
\begin{aligned}
54 + 27 &= 54 + 30 - 3 \\
&= 84 – 3
\end{aligned}
$$

$$= 81$$

54 + 27 también puede resolverse de la siguiente manera:

Escribir 60 en lugar de 54, sumar 27 y luego restar 6, porque 60 es 6 más que 54, es decir:

$$54 + 27 = 60 + 27 - 6$$

También se podría sumar 30 a 54 y después restar 3 porque se sumaron 3 de más, es decir,

$$54 + 27 = 54 + 30 - 3$$

La utilización del recurso del complemento al número redondo inmediato superior no se agota en estas sumas, también es útil en casos como los siguientes:

Usos del complemento al número redondo inmediato superior para calcular la suma de varios términos

Por ejemplo: 237 + 49 + 63 + 582

Un procedimiento posible es: calcular 237 + 63 por un lado, y por otro lado, calcular 49 + 582 y finalmente realizar la suma de los dos resultados parciales.

Para calcular 237 + 63, se puede transformar el 63 en 60 + 3 y después sumar 237 + 3 + 60,

$$\begin{aligned} 237 + 63 &= 237 + 3 + 60 \\ &= 240 + 60 \\ &= 300 \end{aligned}$$

Para calcular 582 + 49, se puede transformar el 49 en 40 + 8 + 1 (con apoyo en el número redondo inmediato superior a 82 que es 90) y después sumar 582 + 8 + 40 + 1 pero transformando el 40 en 10 + 30, entonces resulta:

$$\begin{aligned} 582 + 49 &= 582 + 8 + 40 + 1 \\ &= 582 + 8 + 10 + 30 + 1 \\ &= 590 + 10 + 31 \\ &= 600 + 31 \\ &= 631 \end{aligned}$$

Finalmente se suman 300 y 631 y se obtiene 931.

En este caso se usaron las propiedades conmutativa y asociativa de la suma.

Usos del complemento al número redondo inmediato superior para calcular restas:

Por ejemplo, 56 – 37 puede transformarse en 56 – 40 + 3 porque el 37 puede transformarse en 40 – 3 (apoyándose en el número redondo inmediato superior a 37 que es 40). Como a 56 se le restan 40 (tres más que 37), se agregan (se devuelven) 3.

Usos del complemento al número redondo inmediato superior para multiplicar:

Por ejemplo, 25 x 38 puede transformarse en 25 x 40 – 25 x 2, y resulta más cómodo para resolver porque 25 x 40 puede calcularse como 25 x 4 x 10 entonces queda:

$$\begin{aligned} 25 \times 38 &= 25 \times 40 - 25 \times 2 \\ &= 25 \times 4 \times 10 - 25 \times 2 \\ &= 1000 - 50 \\ &= 950 \end{aligned}$$

25 x 38 puede pensarse como la suma de 38 veinticincos, que a su vez puede plantearse como la suma de 40 veinticincos (25 x 40) a la que hay que sacarle los dos veinticincos que se sumaron de más (25 x 2). Luego, 25 x 38 = 25 x 40 – 25 x 2.

Según el año que cursen los alumnos y su experiencia en escrituras matemáticas, el docente tendrá que evaluar cuánto de esto queda escrito explícitamente en los cuadernos o carpetas y cuánto puede sostenerse desde un trabajo más coloquial.

Juego 5 – Dominó

Objetivos del juego: reconocer y memorizar complementos a 10. Buscar complementos a 20.

Materiales: un juego de dominó.

Organización de la clase: se divide la clase en parejas.

Reglas del juego: se juega como el dominó común, pero en lugar de colocar una ficha con el mismo número, se colocará la ficha con el complemento a 10 (o 20, si se buscan complementos a 20).

Variantes del juego:

a) En lugar de colocar fichas que sumen 10, se colocará la ficha que designe al número redondo inmediato superior (por ejemplo, si se tiene 58, se debe colocar 60; si se tiene 20, se debe colocar 30). En este caso, se podrá modificar el intervalo numérico seleccionado para favorecer la búsqueda del número redondo inmediato superior correspondiente a cualquier número de dos cifras.

b) Se colocará la ficha que designe el complemento al número redondo inmediato superior (por ejemplo, si se tiene 58, se debe colocar 2; si se tiene 20, se debe colocar 10).

Comentarios: es importante destacar que al proponer este juego a los niños se espera propiciar tanto la recuperación de un conjunto de cálculos memorizados como la reconstrucción de procedimientos para reconocer sumas que dan 10 y sumas que dan 20. Por lo tanto, el maestro evaluará la pertinencia de su implementación a partir del trabajo que se viene desarrollando en el aula.

En función de las necesidades de cada grupo de alumnos y del trabajo desplegado en cada aula el docente podrá proponer el juego de dominó en alguna de las variantes mencionadas en el párrafo anterior.

Al finalizar el juego, en una instancia colectiva de trabajo, se puede habilitar el espacio para la discusión acerca de las estrategias utilizadas.

Es interesante que se anoten en el pizarrón los cálculos que se realizaron. Es importante considerar que a veces los alumnos apelan a un cálculo que no pueden escribir, entonces la maestra podrá ayudarlos a escribirlo.

Posibles procedimientos para buscar complementos a 20:

Para decidir qué ficha colocar a continuación del 17, es posible que los niños usen resultados memorizados:

7 + 3 = 10, entonces 10 + 7 + 3 = 20 y se coloca el 3

Para decidir qué ficha colocar a continuación del 8, podrán pensar 8 + 2 = 10, entonces 8 + 2 + 10 = 20 y se coloca 12.

Para decidir qué ficha colocar a continuación del 1, algunos niños pueden usar el procedimiento de complemento a 10 entonces 1 + 9 + 10 = 20 y se coloca 19.

Las relaciones entre la suma y la resta se elaboran a partir de enfrentar distintas situaciones y de trabajar sobre los cálculos. Por esta razón resulta interesante someter a discusión ambas escrituras y que se aliente a los alumnos a buscar vínculos entre ellas.

Algunos podrán explicar: si a 1 le agrego 9, llego a 10 y si le agrego 10 más llego a 20, entonces, si a 20 le saco 19 (los que agregué antes), llego a 1.

Luego de la discusión en torno a los procedimientos desplegados, se pueden proponer las siguientes actividades:

Resolvé los siguientes cálculos (podés usar lápiz y papel):

13 + 23 + 7 + 12 + 18 =
27 + 15 + 4 + 3 + 5 =
47+ 180 + 60 + 53 + 20=
32 + 72 + 28 + 64 =
171 + 17 + 29 + 83 =
999 + 38 +1 + 12 + 50 =
6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 45 =
3998 + 76 + 2 + 124 + 2 =
198 + 2 + 198 +2 + 2 + 198 =

Sin hacer la cuenta de la izquierda, ¿qué números escribirías en los lugares vacíos? ¿Cómo te diste cuenta?

27 + 8 = 30 + …
37 + 18 = 47 + …
128 + 15 = 130 + …
54 + 27 = 60 + …
54 + 27 = 74 + …
128 + 15 = 140 + …
54 + 27 = 80 + …

Sumas y restas que dan 100

Como parte de la construcción del repertorio aditivo es necesario extender las sumas que dan 10 a sumas que dan 100 y a partir de ellas establecer las restas asociadas que dan 100.

Juego 6 – Chancho: suma 100

Objetivo del juego: reconocer cuatro números que sumados resulten 100.

Materiales: se fabrica un mazo de 16 cartas[12] para cada grupo de cuatro alumnos.

Reglas del juego: se reparten todas las cartas. Cada jugador elige una, para pasársela al jugador ubicado a su derecha en el momento en el que todos dicen "chancho va". Cada uno calcula la suma de sus cuatro cartas. El que obtiene 100, dice "chancho" y todos los jugadores deben colocar la mano en el centro de la mesa, una sobre otra. Pierde el jugador que coloca la mano en último lugar. Si ninguno de los jugadores obtiene 100, se vuelve a jugar otra ronda de chancho.

Ejemplos de algunas cuaternas de cartas para las que se dice chancho:

5 / 15 / 60 / 20
50 / 5 / 25 / 20
20 / 10 / 40 / 30

Juego 7 – ¿Cómo llego a 100?

Objetivo del juego: identificar cuánto le falta o hay que sacarle a un número para llegar a 100.

Materiales: grillas con números múltiplos de 10. Cada número está presente en al menos dos grillas.

Organización de la clase: la clase se divide en grupos de cuatro alumnos.

Reglas del juego: cada grupo recibe una grilla distinta. El docente realizará una pregunta por vez hasta que termine de formularlas todas. Para cada pregunta, si el resultado está sobre la grilla, el grupo levanta la mano y lo tacha. El análisis colectivo permitirá decidir si

[12] Un posible mazo podría ser: 5/10/15/20/25/30/35/40/45/50/55/60/65/70/75/80

el resultado que encontró cada grupo es correcto. El primer grupo que llegue a tachar 10 números correctamente es el ganador.

Ejemplo de una posible grilla:

70	150	100	120	170	160
180	200	190	190	90	40
20	0	50	30	10	60
80	90	110	130	150	50

Posibles preguntas:

¿Quién tiene **20 más que** 100?
¿Quién tiene **50 menos que** 100?
¿Quién tiene **100 más que 100**?
¿Quién tiene **100 menos que 100**?

Comentarios: el juego les propone a los niños problemas de búsqueda de complementos a 100 o diferencias a 100. Para dicha resolución pueden apoyarse en diferencias conocidas, por ejemplo: para 100 – 70 es posible apoyarse en 10 – 7 = 3, ya que 100 – 70 puede interpretarse como 10 dieces menos 7 dieces, que son 3 dieces y 3 dieces es 30.

Recordemos que las preguntas se refieren siempre a 100.

Si se tiene una carta menor que 100, por ejemplo 70, y la pregunta es ¿quién tiene 30 menos que 100?, algunos procedimientos posibles vinculados a la pregunta anterior podrían ser:

Uso del complemento:

Algunos alumnos calculan cuánto le falta a 70 para llegar a 100 y a partir de aquí responden que como les falta 30 para llegar a 100, tienen 30 menos que 100. La relación entre "falta 30 para llegar a 100" y "el número tiene 30 menos que 100" no es evidente para los niños más pequeños o los que no han tenido oportunidad de reflexionar sobre ello. Por lo tanto, es importante que en una instancia de discusión colectiva se proponga un debate acerca de estas afirmaciones, se las vincule, se analicen sus similitudes y diferencias para arribar a una conclusión que podrá quedar registrada en los cuadernos.

Uso de la resta:

Otros niños calculan la diferencia entre 100 y 70 (miden la distancia entre dos números) y a partir de esta diferencia responden a la pregunta.

Para una carta con el número 40 y la pregunta: ¿Quién tiene 30 menos que 100?

Algunos alumnos calculan la diferencia entre 100 y 30 que es 70 y como no tienen esa carta no levantan la mano.

Algunos alumnos calculan cuánto le falta a 40 para llegar a 100. Como les falta 60 para llegar a 100, entonces tienen 60 menos que 100 y no levantan la mano.

Posibles estrategias de cálculo

Para calcular cuánto le falta a 70 para llegar a 100

Aunque no surjan desde un primer momento, la idea es que los alumnos comiencen a apoyarse en resultados memorizados: por ejemplo, como 7 + 3 =10 entonces 70 + 30 es 100. Esto se debe a que 70 + 30 puede interpretarse como 7 dieces más 3 dieces, que son 10 dieces (y para saber este resultado es necesario saber que 7 + 3 es 10) y 10 dieces es 100. Entonces a 70 le falta 30 para llegar a100.

Para calcular 100 – 30 pueden apoyarse en que 10 – 3 = 7, pues 10 dieces menos 3 dieces son 7 dieces, que es 70, entonces 100 – 30 = 70.

Posibles procedimientos para responder a la pregunta ¿quién tiene 80 más que 100?

A lo largo de las repeticiones del juego, los alumnos deberán concluir que esta pregunta sólo es posible para números mayores que 100, que son los únicos que “se pasan de 100”.

Si un niño tiene, por ejemplo la carta 180:

- Podrá pensar que “los números ya te lo dicen” pues si tiene 180 “se pasa por 80”.
- Podrá desarmar el 180 en 100 y 80 y concluir que tiene 80 de más.
- Otros podrán calcular 180 -100 y decidir que tienen 80 de más.

Si un alumno tiene un número mayor que 100 y menor que 180, por ejemplo 130:

- Podrá desarmar el 130 en 100 y 30 para decidir que tiene 30 de más y no levanta la mano.

El análisis colectivo es imprescindible para poner en discusión las diferentes formas de resolución.

Los alumnos construyen las relaciones entre la suma y la resta a partir de enfrentarse a distintos problemas que las involucren. Resulta interesante pedirles que escriban los cálculos que hicieron y que busquen relaciones entre, por ejemplo, las siguientes escrituras: 70 + 30 = 100 y 100 – 30 = 70.

Algunos alumnos podrán dar explicaciones del tipo: si a 70 le agrego 30 y me da 100, entonces para tener 70, a 100 le tengo que sacar los 30 que le había agregado.

Es interesante que queden registrados los diferentes cálculos que se utilizaron en el pizarrón y en los cuadernos de los niños.

Si algunas de las estrategias que el docente está interesado en someter a discusión no surge por parte de los alumnos, puede elegir comunicarla a través de un problema para reflexionar. Por ejemplo: Martina tiene una carta con el 130 y para saber cuánto se pasa de 100 hace 130 – 100. ¿Están de acuerdo? ¿Por qué?

Con el objeto de reinvertir las estrategias que se usaron en el juego y de extender el repertorio de resultados de sumas y restas conocidos a cálculos con números mayores. Por ejemplo, en la siguiente actividad, las preguntas se hacen con referencia a 1.000:

Sabemos que las preguntas que formuló la maestra no se escucharon. A partir de la información que proporciona el cuadro ¿se podría saber cuáles fueron esas preguntas?

Preguntas	Martina tiene	Pablo tiene	Levantó la mano:
……………….	150	850	Martina
……………….	230	770	Pablo
……………….	250	750	Ninguno de los dos
……………….	100	900	Los dos

Comentarios:

En el primer caso, si Martina levantó la mano es porque la pregunta fue: ¿quién tiene 850 menos que 1000?

En el segundo caso, si Pablo levantó la mano es porque tiene 230 menos que 1000.

En el tercer caso, si Martina no levantó la mano es porque la pregunta no fue "¿Quién tiene 750 menos que 1000?". Asimismo, es posible saber que como Pablo no levantó la mano, la pregunta tampoco fue "¿Quién tiene 250 menos que 1000?". La pregunta pudo haber sido cualquiera excepto estas, es decir que hay muchas posibilidades. No esperamos que los niños señalen la cantidad, sino que se den cuenta de que no hay una única posibilidad.

La cantidad de preguntas posibles va a depender de la cantidad de tarjetas que se prepararon. En el caso extremo en que se hubiesen preparado 1001 preguntas, desde "¿Quién tiene 0 menos que 1000?" hasta "¿Quién tiene 1000 menos que 1000?", habría 999 preguntas posibles (a las 1001 posibles hay que restarles las dos preguntas con las que Martina y Pablo levantarían la mano).

En el cuarto caso - si Martina tiene 100 y Pablo tiene 900 y los dos levantan la mano - esperamos que se discuta acerca de que no es posible que exista una pregunta para la cual ambos levanten la mano. Sería interesante analizar con los alumnos que si Martina y Pablo levantan la mano al mismo tiempo, necesariamente alguno de los dos se equivocó. Si la pregunta es "¿quién tiene 100 menos que 1000?" sólo Pablo debe levantar la mano. Si la pregunta es "¿quién tiene 900 menos que 1000?" solo Martina debería levantar su mano.

Dobles

¿Por qué trabajar dobles?

Conocer el resultado de sumas como: 2 + 2; 3 + 3; 4 + 4; 5 + 5, etc., hasta 10 + 10, constituye una base sólida para pensar otros cálculos mentales y permite establecer otras relaciones que ayudan a organizar diversas situaciones de cálculo mental.

Por ejemplo:

- 8 + 9 se puede pensar como 8 + 8 + 1, que es 16 + 1.

- Para poder establecer relaciones entre algunas tablas de multiplicar, por ejemplo que la tabla del cuatro es el doble de la tabla del dos; que la tabla del 10 es el doble de la tabla del 5.

- Para calcular dobles de números más grandes, a partir de procedimientos como los siguientes:

  ✓ El doble de 17 es igual al doble de 10 más el doble de 7, poniendo en juego la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma, aunque de manera implícita. También puede pensarse del siguiente modo:

El doble de 17 se puede obtener sumando 17 + 17, que es
10 + 7 + 10 + 7 = 10 + 10 + 7 + 7.

Pero 10 + 10 es el doble de 10 y 7 + 7 es el doble de 7, luego el doble de 17 es el doble de 10 más el doble de 7. Es decir:

$$
\begin{aligned}
\text{Doble de } 17 &= 17 + 17 \\
&= 10 + 7 + 10 + 7 \\
&= \underbrace{10 + 10} + \underbrace{7 + 7} \\
\text{Doble de } 17 &= \text{Doble de } 10 + \text{Doble de } 7
\end{aligned}
$$

  ✓ El doble de 59 es igual al doble de 60 menos 2, ya que 2 es el doble de 1. En este caso se pone en juego implícitamente la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la resta si se piensa de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
\text{Doble de } 59 &= 2 \times 59 \\
&= 2 \times (60 - 1) \\
&= 2 \times 60 - 2 \times 1 \\
&= 2 \times 60 - 2
\end{aligned}
$$

También puede calcularse a partir de otras transformaciones, como por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
\text{Doble de } 59 &= 59 + 59 \\
&= 60 - 1 + 60 - 1 \\
&= 60 + 60 - 1 - 1 \\
&= 60 + 60 - 2 \\
&= (\text{Doble de } 60) - 2
\end{aligned}
$$

Juego 8 – ¿Cuál es el doble?

Objetivos del juego: calcular dobles. Extender los resultados conocidos a números más grandes.

Materiales: un mazo de 24 cartas y tarjetas con preguntas como las que figuran a continuación.

Ejemplo de un posible mazo de cartas:

72	**12**	**20**	**4**	**18**	**40**
14	**30**	**50**	**10**	**80**	**8**
60	**6**	**0**	**16**	**2**	**200**
400	**100**	**800**	**600**	**36**	**24**

Posibles preguntas:

¿Quién tiene el doble de 2?	¿Quién tiene el doble de 10?	¿Quién tiene el doble de 6?
¿Quién tiene el doble de 7?	¿Quién tiene el doble de 20?	¿Quién tiene el doble de 9?
¿Quién tiene el doble de 5?	¿Quién tiene el doble de 25?	¿Quién tiene el doble de 15?
¿Quién tiene el doble de 30?	¿Quién tiene el doble de 4?	¿Quién tiene el doble de 40?
¿Quién tiene el doble de 8?	¿Quién tiene el doble de 0?	¿Quién tiene el doble de 3?
¿Quién tiene el doble de 200?	¿Quién tiene el doble de 100?	¿Quién tiene el doble de 1?
¿Quién tiene el doble de 300?	¿Quién tiene el doble de 400?	¿Quién tiene el doble de 50?
¿Quién tiene el doble de 12?	¿Quién tiene el doble de 18?	¿Quién tiene el doble de 11?

Organización de la clase: la clase se divide en parejas.

Reglas del juego: cada pareja va a recibir dos cartas con números. El docente hará una pregunta por vez a toda la clase hasta que termine de usar todas las tarjetas. La pareja que responda primero se anotará un punto. Gana la pareja con mayor cantidad de puntos.

Comentarios: después de jugar, es importante habilitar una instancia de intercambio colectivo con la intención de que los alumnos expliciten los procedimientos usados y los confronten.

Se espera que para calcular el doble de números menores que 10, recurran a algunos resultados memorizados. Esta será una oportunidad para que los alumnos puedan tener registro de aquellos resultados que efectivamente tienen disponibles y cuáles no. Se puede discutir de manera colectiva cuáles han sido los dobles que memorizaban. Para los dobles más difíciles se podrá discutir colectivamente distintas formas de calcularlos. Por ejemplo, para calcular el doble de 7, es posible pensar en el doble como la suma de dos sietes, 7 + 7, que a su vez es lo mismo que 7 + 3 + 4 (transformando el 7 en 3 + 4) y apoyándose en sumas que dan 10:

doble de 7 = 7 + 7
= 7 + 3 + 4
= 10 + 4
= 14

También se podría calcular de la siguiente manera:

doble de 7 = 7 + 7
= 5 + 2 + 5 + 2 (apoyándose en dobles más fáciles de memorizar).

Para calcular el doble de 9 se podría por ejemplo, desarmar el 9 en 5 + 4, entonces

doble de 9 = 9 + 9
= 5 + 4 + 5 + 4
= 5 + 5 + 4 + 4
= 10 + 8 = 18

Otro procedimiento podría ser calcular el doble de 10 y restarle 2, que es el doble de 1. ¿Por qué es correcto? Porque

doble de 9 = 9 + 9
= 10 – 1 + 10 – 1
= 10 + 10 – 1 – 1

= (doble de 10) – (doble de 1)

Cada alumno podrá anotar en su cuaderno qué dobles necesita estudiar porque aún no los recuerda.

En otros casos, se espera que se apoyen en dobles conocidos. Por ejemplo, para buscar el doble de 30 es posible razonar de la siguiente manera:

si 3 + 3 es 6, entonces 30 + 30 es 60;
30 + 30 puede interpretarse como 3 dieces más 3 dieces, que son 6 dieces (a partir del resultado anterior) y 6 dieces es 60.

Luego de la instancia colectiva se podría proponer la siguiente actividad:

Supongamos que en el juego se formularon las preguntas que figuran en la columna de la izquierda. Completen la tabla.

	Juan tiene	**Nicolás tiene**	**¿Quién levanta la mano? Explicá cómo te diste cuenta**
¿Quién tiene el doble de 34?	64	68	
¿Quién tiene el doble de 89?	179	169	
¿Quién tiene el doble de 97?	184	194	

¿Se puede saber qué preguntas formuló la maestra? Expliquen por qué.

Preguntas	**Juan tiene**	**Nicolás tiene**	**Levantó la mano:**
	104	102	Juan
	56	58	Nicolás
	20	22	Ninguno de los dos
	98	96	Los dos

En el primer caso, Juan levantó la mano porque la pregunta fue: ¿quién tiene el doble de 52?

En el segundo caso, si Nicolás levantó la mano, es porque tiene el doble de 29.

En el tercer caso, si Juan no levantó la mano es porque la pregunta no fue "¿Quién tiene el doble de 10?". Asimismo, es posible saber que como Nicolás no levantó la mano, la pregunta tampoco fue "¿Quién tiene el doble 11?". La pregunta pudo haber sido cualquiera excepto estas, es decir que hay muchas posibilidades.

En el cuarto caso - si Juan tiene 98 y Nicolás tiene 96 y los dos levantan la mano - esperamos que se discuta acerca de que no es posible que exista una pregunta para la cual ambos levanten la mano.

Juego 9 – Dobles y mitades

Objetivos del juego: reconocer dobles y mitades.

Materiales: un mazo de 24 cartas.

Ejemplo de un posible mazo de cartas:

800	**160**	**140**	**40**	**70**	**240**
300	**20**	**100**	**80**	**400**	**220**
600	**30**	**90**	**200**	**500**	**2000**
6000	**4000**	**250**	**3000**	**150**	**1500**

Ejemplos de posibles preguntas:

¿Quién tiene el doble de 20?	¿Quién tiene el doble de 70?	¿Quién tiene el doble de 80?
¿Quién tiene el doble de 150?	¿Quién tiene el doble de 120?	¿Quién tiene la mitad de 140?
¿Quién tiene la mitad de 160?	¿Quién tiene el doble de 50?	¿Quién tiene la mitad de 40?
¿Quién tiene el doble de 300?	¿Quién tiene el doble de 110?	¿Quién tiene el doble de 200?
¿Quién tiene el doble de 100?	¿Quién tiene la mitad de 180?	¿Quién tiene la mitad de 60?
¿Quién tiene el doble de 3000?	¿Quién tiene el doble de 1000?	¿Quién tiene el doble de 250?
¿Quién tiene la mitad de 6000?	¿Quién tiene la mitad de 500?	¿Quién tiene la mitad de 8000?

¿Quién tiene la mitad de 3000?	¿Quién tiene la mitad 300?	¿Quién tiene la mitad de 200?

Organización de la clase: la clase se divide en parejas.

Reglas del juego: cada pareja va a recibir dos cartas con números. El docente hará una pregunta por vez a toda la clase hasta que termine de usar todas las tarjetas. La pareja que responda primero se anotará un punto. Gana la pareja con mayor cantidad de puntos.

Comentarios: presentamos este juego como una posible prolongación del Juego de Dobles. Al proponerlo se pretende que los alumnos se apoyen en el repertorio conocido para calcular dobles de números más grandes y mitades y que puedan explicar el modo en que lo realizan.

Posibles procedimientos:

Algunos ejemplos de estrategias para calcular el doble de 150:

- calcular el doble de 100 y sumarle el doble de 50.
- apoyarse en el resultado conocido 15 + 15 = 30, pues 150 son 15 dieces, entonces 15 dieces mas 15 dieces son 30 dieces y 30 dieces son 300.

Algunos ejemplos de estrategias para calcular la mitad de 140:

- Como 140 = 70 + 70 (pues 7+7 = 14 y 7 dieces + 7 dieces = 14 dieces, que es 140), entonces 70 es la mitad de 140, porque dos veces 70 es 140.
- calcular la mitad de 100 y sumarle la mitad de 40, entonces la mitad de 140 es 50 +20 = 70.

En este último caso se pone en juego, de modo implícito, la propiedad distributiva de la división respecto de la suma a derecha:

$$\begin{aligned} \text{Mitad de } 140 &= 140 \div 2 \\ &= (100 + 40) \div 2 \\ &= 100 \div 2 + 40 \div 2 \\ &= 50 + 20 = 70 \end{aligned}$$

Luego de la fase colectiva se puede proponer al grupo completo la siguiente actividad: completen las dos columnas vacías a partir de los números dados en la primera columna.

	El doble de	La mitad de
80		
82		
90		
94		
96		

Estrategias posibles

Para calcular el doble de 80 se puede tomar como referencia el cálculo 8 + 8 =16, entonces 8 dieces más 8 dieces son 16 dieces, que es 160.

Para calcular el doble de 96 se puede pensar 96 = 90 + 6, calcular el doble de 90, que es 180, y luego sumarle el doble de 6 que es 12.

Para calcular la mitad de 90 se puede pensar a 90 como 80 + 10 y calcular la suma de las mitades. Es decir, sumar 40 más 5, que es 45.

Para calcular la mitad de 96, que es 90 más 6, se puede considerar la mitad de 90, que es 45 y sumarle la mitad de 6, que es 3.

	El doble de	La mitad de
98		
99		
100		
101		
102		

Se pretende analizar la pertinencia de los procedimientos utilizados. Se espera que, por ejemplo, para buscar la mitad de 101, recurran a sumar la mitad de 100 y la mitad de 1. En función del trabajo desplegado en el aula el maestro evaluará el modo de profundizar la discusión. No obstante, se espera que los alumnos discriminen los números dados en la tabla en dos grupos: un grupo formado por los números que al dividirlos por 2 no sobra nada y números que al dividirlos por 2, sobra 1. Algunos niños propondrán usar "medio" para la mitad de 1. Es un buen momento para clasificar los números en pares e impares.

SEGUNDA PARTE

Ejemplos de cálculos mentales para la construcción de cierto repertorio multiplicativo

Como ya hemos mencionado, sabemos que para comprender y usar las cuatro operaciones elementales se requieren largos procesos de trabajo. A la vez de proponer un tipo de tarea que contribuya a construir el sentido de las operaciones, se hace necesario promover no sólo un trabajo destinado al cálculo mental sino al cálculo en su conjunto en todas sus expresiones.

A continuación, presentamos algunos ejemplos para el trabajo de cálculo mental relativos a la multiplicación y a la división en torno a los cuales proponemos juegos que colaboran en su elaboración y consolidación.

Exploración de multiplicaciones de dos números hasta 10 entre sí[13].

¿Por qué trabajar las relaciones multiplicativas de los números hasta 10 entre sí?

Es necesario que los alumnos exploren y reflexionen en torno a conocimientos vinculados a la multiplicación entre dos números de un dígito. El trabajo sobre la tabla pitagórica es una oportunidad para ello. Las actividades propuestas en torno a la tabla pitagórica[14] promueven, entre otras cosas, el establecimiento de relaciones entre las distintas tablas de multiplicar y la explicitación de las mismas. Estas actividades se constituyen en un marco para pensar cómo reconstruir los resultados de una multiplicación a partir de otros.

Los juegos que proponemos a continuación colaboran en la ampliación y memorización del repertorio multiplicativo.

---

[13] Quaranta María Emilia; Ressia de Moreno, Beatriz, *Matemática para que aprendan todos. Numeración escrita y cálculo mental en primer ciclo.* Una experiencia en Centros de Apoyo Escolar. Buenos Aires: Red de apoyo escolar. 2006.

[14] Recomendamos la lectura del documento: "Cálculo mental. Propuestas para trabajar en el aula: multiplicación y división", DGCyE Pcia. De Bs As., DPEP, 2009. Disponible en el *Portal abc*, dentro del sitio web de la Dirección Provincial de Educación Primaria: www.abc.gov.ar/lainstitucion/sistemaeducativo/educprimaria/default.cfm

Juego 1 – La tapadita

Objetivos: construir un repertorio de cálculos memorizados de productos y establecer relaciones entre productos de la tabla.
Materiales: una tabla como la siguiente y variedad de cartoncitos de tres colores distintos que permitan tapar algunos casilleros de la tabla.

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Organización de la clase: la clase se divide en dos grupos.

Reglas del juego: el docente presenta una tabla pitagórica completa en el pizarrón. Luego, sin que los alumnos vean, tapa algunos casilleros de la tabla con cartones de distintos colores.

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4		8		12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30					
7	7	14	21	28						70
8	8	16	24	32	40				72	
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

El problema consiste en decir qué números se taparon. Por turno, un representante de cada grupo dice cuál es el casillero que se eligió y dice cuál es el número escondido. Cuando se terminen de decir todos los números tapados, se termina el juego. Para calcular el puntaje obtenido por cada grupo se considera que: cada cartón verde vale 3 puntos, cada cartón azul vale 2 puntos, cada cartón amarillo vale un punto y por cada número mal cantado se descuenta un punto. Gana el grupo que tiene más puntos.

Comentarios: sería interesante implementar el juego una vez que se hayan dedicado momentos específicos de trabajo en el aula destinados a la construcción de la tabla pitagórica.

Al proponer este juego se pretende tanto consolidar aquello que ya ha sido memorizado, como así también ofrecer oportunidades para que todos los alumnos vayan memorizando productos que solamente algunos recuerdan.

Es importante tener presente que las tablas del 1, del 2 y del 5 son más fáciles de reconstruir y de memorizar. Su conocimiento constituye un punto de apoyo fuerte para trabajar sobre otras tablas.

No obstante, el docente evaluará la elección del color de cada cartón en función de las necesidades y conocimientos de su grupo de alumnos.

La instancia colectiva de trabajo es un momento propicio para la reflexión acerca de los procedimientos desplegados por los alumnos, para discutir acerca de la validez de los mismos, analizar la equivalencia de los procedimientos, entre otras.

Algunos procedimientos posibles:

- ✓ Utilizar resultados memorizados.
- ✓ Poner en juego regularidades de la tabla. Por ejemplo, para establecer cuál es el número tapado por el cartón verde de la columna del 8 (correspondiente a 8 x 7) se puede:
    - Teniendo en cuenta que los productos consecutivos por 8 varían de 8 en 8 y que 5 x 8 es 40, para obtener 7 x 8 hay que sumar 8 dos veces (una para obtener 6 x 8 y otra para 7 x 8).

- También podemos considerar como 8 x 7 es el doble de 4 x 7 (y este producto está visible), entonces 8 x 7 = 2 x 4 x 7 = 2 x 28 = 56.

- A 72, que es 9 veces 8, le restamos 16 que es 2 veces.
- “mirando” la fila del 7 y teniendo en cuenta que 8 × 7 es el doble de 4 × 7, entonces se calcula 8 × 7 = 28 + 28 = 56.
- Como 8 × 7 = 10 × 7 - 2 × 7, entonces 8 × 7 = 70 – 14 = 56.

✓ Para 6 x 9

Como 9 x 6 es igual que 6 x 9 y 6 x 9 está disponible en la tabla, entonces es 54.

De todos modos, si no se usó ese recurso, se puede calcular de varias maneras, por ejemplo: como 9 veces 6, es 4 veces 6 más 5 veces 6, entonces 9 x 6 = 4 x 6 + 5 x 6 (ambos productos están disponibles en la tabla), entonces 9 x 6 = 24 + 30 = 54.

Otra forma: como 10 x 6 es fácil de calcular, entonces 10 veces 6 menos 1 vez 6 es 9 veces 6, es decir, 10 x 6 – 1 x 6 = 9 x 6 = 54.

Otras formas: 6 x 9 es el triple de 6 x 3, entonces

6 x 9 = 3 x 6 x 3 = 3 x 18
= 3 x 10 + 3 x 8
= 30 + 24 = 54

Como 6 x 9 es el doble de 3 x 9 entonces 6 x 9 = 2 x 3 x 9 = 2 x 27 = 54

Luego de una instancia colectiva se puede pedir a los alumnos que escriban cinco multiplicaciones que sepan de memoria y cinco que no sepan.

Estas multiplicaciones son fáciles de recordar	**Estas multiplicaciones son más difíciles de recordar**

Luego colectivamente se puede armar una tabla como la que sigue:

Nos acordamos de estas multiplicaciones	**De estas multiplicaciones todavía no nos acordamos**

Finalmente, se puede pedir a los alumnos que elijan multiplicaciones de la columna "todavía no nos acordamos" y propongan distintas estrategias que ayuden a recordarlas.

Por ejemplo:

Para 8 x 7

Se puede reconstruir 8 x 7 de varias maneras:

Usando la noción de multiplicación como suma reiterada resulta:

7 veces 8 es 8+8+8+8+8+8+8 o también 8 veces 7 es 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 y a partir del conocimiento del doble de 7, que es 14, se podría calcular 14 + 14 y luego a ese resultado que es 28, sumarle los otros 28, es decir:

$$
\begin{aligned}
8 \times 7 &= 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 \\
&= 14 + 14 + 14 + 14 \\
&= 28 + 28 \\
&= 56
\end{aligned}
$$

También se puede pensar 8 veces 7, como la suma de 5 veces 7 y 3 veces 7 (con apoyo en la tabla del 5 y en la del 3), entonces,

$$
\begin{aligned}
8 \times 7 &= 5 \times 7 + 3 \times 7 \\
&= 35 + 21 \\
&= 56
\end{aligned}
$$

Si se dispone del resultado memorizado 7 x 7 = 49, entonces,

$$
\begin{aligned}
8 \times 7 &= 7 \times 7 + 1 \times 7 \\
&= 49 + 7 \\
&= 49 + 1 + 6 \\
&= 56
\end{aligned}
$$

Para calcular 8 veces 7 se puede calcular 10 veces 7 y restarle 2 veces 7

$$
\begin{aligned}
8 \times 7 &= 10 \times 7 - 2 \times 7 \\
&= 70 - 14 \\
&= 70 - 10 - 4
\end{aligned}
$$

= 60 – 4

= 56

O también 8 x 7 = 2 x 2 x 2 x 7

Proponemos que los alumnos anoten en sus cuadernos los diferentes procedimientos para recurrir a ellos en el momento de estudiar y de buscar información.

Juego 2 – Juegos con tarjetas

Objetivos: identificar al número de cada cuadradito de la tabla pitagórica como un producto de dos números.

Materiales: una tabla pitagórica vacía y 100 tarjetas con los productos de la tabla pitagórica escritos.

100 tarjetas (cada casillero representa una de las tarjetas):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Organización de la clase: se juega de a cuatro.

Reglas del juego: se mezclan las 100 tarjetas en una bolsa. El docente saca tres tarjetas al azar y las ubica en el casillero correspondiente de una tabla vacía. Luego cada jugador saca 8 tarjetas de la bolsa sin mirar. El resto de las tarjetas constituye el pozo que se coloca con las tarjetas apiladas hacia abajo.

Por turnos cada jugador puede ubicar una de las 8 tarjetas que tiene en un casillero vacío siempre que rodee a un casillero ocupado. Si no puede ubicar ninguna de sus tarjetas, tiene que pasar su turno y tomar una tarjeta del pozo.

El jugador que ubique una tarjeta sobre la diagonal del cuadrado tiene derecho a elegir una de sus tarjetas y dejarla en el pozo.

Cuando uno de los jugadores se queda sin tarjetas, se termina el juego y dicho jugador gana el partido.

Juego 3 – Rompecabezas con tablas pitagóricas

Objetivos: explicitar relaciones entre las diferentes filas y columnas de la tabla pitagórica.

Organización de la clase: se juega en grupos de cuatro alumnos.

Reglas del juego: cada grupo deberá completar, si es posible, una cierta cantidad de tablas de manera que las mismas sean partes de la tabla pitagórica. Ganará el grupo que complete primero y de manera correcta la mayor cantidad de tablas.

Materiales: tablas de números como, por ejemplo:

5	10		
	12		

	24	27

		32
		40

40	48	

18		
	30	

	45	54	

20			
	30		

	54	

	72	
		90

14		

17			

	49	

	32	

Después de jugar, en la fase colectiva, se puede proponer una discusión acerca de los procedimientos utilizados para completar las tablas.

Se espera que por ejemplo, para la primera tabla, los alumnos reconozcan que los números dados en la primera fila son los dos primeros resultados de la fila o tabla del 5, por lo tanto para completar el primer casillero vacío a la derecha de 10, se suma 5 a 10 que es 15 (es decir, 2 veces 5 mas una vez 5 son 3 veces 5 , que es 3 x 5 y del mismo modo se puede completar el cuarto casillero vacío de la primera fila es decir 15 + 5 = 20 y 20 es 4 x 5.

Para continuar completando la tabla, se podrían considerar las filas o las columnas.

Si se completa a partir de las filas, es preciso considerar que necesariamente la segunda fila debe contener los cuatro primeros resultados de la tabla del 6. Entonces para completar el tercer casillero de la segunda fila, se suma 6 a 12 que es 18 (6 x 3) y después a 18 se suma 6 que es 24. El primer casillero se obtiene restando 6 a 12.

También el juego busca que se elaboren estrategias completando la tabla a partir de las columnas.

Sería interesante discutir con los alumnos, la posibilidad de completar una tabla como la precedente pero si en lugar de 12 se hubiese escrito otro número, por ejemplo, 16. Este hecho llevaría a analizar la coherencia interna de los números que se proponen para comenzar el trabajo con la tabla. En estas condiciones, es decir, si se fijan el 5 y el 10 en la primera fila, necesariamente, los números de la segunda columna corresponderían a la tabla del 2, por lo tanto, tienen que ir de 2 en 2, y como empieza con 10 tiene que ir 12 y no 16. O, si se fija 14, no podrían estar en esos lugares el 5 y el 10. Se pretende reflexionar acerca de la imposibilidad de la convivencia de los tres números si se busca que la tabla pueda formar parte de la tabla pitagórica.

Luego de la fase colectiva se puede proponer la siguiente actividad: para cada una de las siguientes tablas pensar si pueden ser porciones de la tabla pitagórica. Expliquen cómo se dan cuenta.

25	30	35	40	45
30	36	42	48	54
35	42	49	56	63

42	49	56	63
48	56	64	72
54	63	72	81

16	24	32
18	27	36
20	30	40

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

24	25	26	27
34	35	36	37
44	45	46	47

7
12
17
19

50	60	70	80	90

7	8	9	10
14	16	18	20
21	24	27	30
28	32	36	40

8	12	16
10	15	20
12	18	24
14	21	28

64	72	80
74	84	90
84	94	100

50
60
70

64	72	80
72	81	90
80	90	100

32
42
52
62

15	18
20	24
25	30

12	13	14
19	20	21
26	27	28

Es importante señalar que al proponer esta actividad se espera que se reinviertan las estrategias que se usaron durante el juego. En este caso las tablas se dan “completas” y se trata de analizarlas y de producir una explicación.

Por ejemplo, en la siguiente tabla:

12	13	14

19	20	21
26	27	28

La diferencia de cada número con respecto al número de la misma columna, en la fila de abajo, es de 7. Es una razón que da cuenta que dicha tabla no puede ser una porción de la tabla pitagórica.

También hay otras razones que permiten explicar que la relación entre los números de dicha tabla no se corresponde con la relación entre los números de la tabla pitagórica. La diferencia de cada número respecto del número anterior de la misma fila es 1 en todas las filas.

Divisiones a partir de multiplicaciones

Los juegos 4 y 5 apuntan a trabajar las relaciones entre multiplicación y división. El juego 4 propicia la búsqueda del factor desconocido en una multiplicación.

En el juego 5 se pretende avanzar en el trabajo de las relaciones multiplicativas entre ciertos números de una tabla.

Juego 4 – Pienso un número

Objetivos: relacionar multiplicaciones y divisiones.

Organización de la clase: se divide la clase en equipos.

Reglas del juego: el docente hará una pregunta por vez a los equipos hasta que termine de formular todas las preguntas. Para responder a cada una, los integrantes del grupo deben ponerse de acuerdo y levantar la mano. El primer grupo que levanta la mano da la respuesta. Si es correcta se anota un punto, de lo contrario se descuenta un punto. Si tienen 0 puntos, siguen en 0.

A medida que se desarrolla el juego, un integrante de cada grupo registra en una tabla como la siguiente las preguntas y las respuestas que se dan. Gana el equipo con mayor cantidad de puntos.

Preguntas	Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3	Equipo 4
Pienso un número, lo multiplico por 6 y obtengo 48 ¿Qué número pensé?				

Pienso un número, lo multiplico por 8 y obtengo 72 ¿Qué número pensé?				
Pienso un número, lo multiplico por 7 y obtengo 56 ¿Qué número pensé?				

Comentarios: las relaciones entre multiplicación y división se elaboran a partir de enfrentar distintas situaciones y de trabajar sobre cálculos. Por esta razón, resulta interesante someter a la discusión los diferentes procedimientos y que se aliente a los alumnos a buscar relaciones entre ellos.

En el caso siguiente: pienso un número, lo multiplico por 6 y obtengo 48, ¿Cuál es el número que pensé?

Los alumnos pueden recurrir al resultado memorizado 8 x 6 = 48

Otros pueden apelar a otros resultados memorizados e ir tanteando hasta llegar a 48. Por ejemplo, si disponen del resultado memorizado 6 x 5 = 30, se sabe que falta 18 para llegar a 48. Entonces primero se puede sumar 12, que es el resultado de 2 x 6 y finalmente sumar 6. Entonces se usaron 8 veces 6. O bien si se dispone del resultado memorizado 6 x 3 = 18, entonces 5 veces 6, más 3 veces 6, son 8 veces 6, y el número que se busca es 8.

Otros pueden apoyarse en 6 x 10 que es 60. En este caso, se sabe que 60 excede en 12 a 48, y como 12 es el resultado de 6 x 2 resulta que 10 veces 6, menos 2 veces 6 son 8 veces 6, que es 48.

Los niños también podrían reconstruir el resultado buscado a partir del resultado memorizado 4 x 6 y del reconocimiento del doble de 24 que es 48. Un razonamiento puede ser: 24 es el resultado de multiplicar 4 por 6, pero como se obtiene 48, que es el doble de 24, entonces el número pensado tiene que ser el doble de 4, que es 8. Se ponen en juego de manera intuitiva relaciones de proporcionalidad directa entre las tablas.

Otros alumnos podrán usar la noción de división: si se multiplica un número por 6 y se obtiene 48, entonces si 48 se divide por 6, se obtiene el número buscado. El número que se busca se puede pensar como la cantidad de veces que entra 6 en 48. O como la cantidad de grupos de 6 que se pueden armar con 48 y este hecho se desprende de la lectura de la escritura multiplicativa: 8 x 6 = 48, o sea con 48, se pueden armar 8 grupos de 6.

Juego 5 – Tablas de productos

Objetivos: relacionar multiplicaciones y divisiones.

Materiales: tablas como las que presentamos más abajo.

Organización de la clase: se divide la clase en parejas.

Reglas del juego: cada pareja deberá completar los lugares vacíos de las siguientes tablas de productos. Ganará la pareja que las complete primero de modo correcto.

x		6		4
	6		33	12
				4
7			77	
		12		

x		4		
		12		
	24		0	
				49
	10			

x			
		30	35
		48	
	36		63

x		40	
	100		200
9			
8			

x		8	
300	2100		
			27
		240	270

Múltiplos de un número

La siguiente actividad pretende promover la puesta en juego de distintas relaciones que permitan a los niños establecer si un número es o no múltiplo de otro.

Juego 6 - Juego de intrusos

Juegos de intrusos[15]

Objetivos: reconocer múltiplos de un número (sin usar ni conocer los criterios).

Organización de la clase: se divide la clase en equipos.

Materiales: una lista de números en el pizarrón y una hoja por cada equipo.

Reglas del juego: el docente escribe en el pizarrón un conjunto de números formado por algunos múltiplos de 7 y otros que no lo son. Los equipos tienen que identificar a los "intrusos", es decir, a los números que no son múltiplos de 7.

Cuando el docente lo indique, los alumnos escriben en un papel a los intrusos. Se anota un punto por cada respuesta correcta. Gana el equipo con mayor cantidad de puntos.

Comentarios:

Por ejemplo, si la lista de números propuesta es la siguiente:
112; 140; 98; 126; 188; 24; 147; 196; 84; 235

Algunos procedimientos posibles son:

Para el 112
Algunos podrán pensar que 112 = 70 + 42
Otros pueden pensar 112 = 56 + 56

En estos casos se usan descomposiciones aditivas de 112 con apoyo en múltiplos de 7 conocidos.

Resulta interesante pedirles a los alumnos una explicación que permita establecer la pertinencia del procedimiento utilizado. Una explicación podría ser: se sabe que 70 es múltiplo de 7, con 70 se pueden formar 10 grupos de 7. A 70 le faltan 42 para llegar a 112 (30 para llegar a 100 y 12 para llegar de 100 a 112 ó 112 – 70 calculando 100 - 70 que es 30 y después sumando 12 a 30). Como con 42 se pueden armar 6

[15] Marie-Lise Peltier, Nicolas De Kocker, Le calcul mental à l'école et en formation des maîtres Séminaire COPIRELEM. 2007.

grupos de 7, entonces 6 grupos de 7 más 10 grupos de 7 son 16 grupos de 7, es decir 112 = 10 x 7 + 6 x 7

10 x 7 + 6 x 7 = 16 x 7, entonces 112 es múltiplo de 7 porque 7 entra "exactamente" 16 veces en 112.

Algunos pueden descomponer multiplicativamente el 112 a partir del reconocimiento del doble de 56, entonces resulta: 112 = 2 x 56

= 2 x 7 x 8

= 7 x 2 x 8

= 7 x 16

Como 112 puede escribirse como el producto entre 7 y un número entero, entonces es múltiplo de 7.

Otros podrán apelar a la división 112 entre 7, a partir del conocimiento de las relaciones entre multiplicación y división. Se puede partir el 112 de manera conveniente y sumar después los resultados parciales, por ejemplo: 70 : 7 + 42 : 7 = 10 + 6 que es 16. También es posible calcular 112÷7 directamente. Si el resto es 0, entonces 112 es múltiplo de 7 y en caso contrario no lo es.

En la lista propuesta de manera precedente los intrusos son: 24; 188 y 235.

En el caso de 24, es suficiente con apelar a resultados memorizados, es decir, si 7 x 3 es 21, hacen falta 3 para llegar a 24, y 7 no entra una vez más en 3.

En el caso de 188,

Se puede pensar 188 de la siguiente manera:

188 = 70 + 70 + 48.
70 es múltiplo de 7, pero 48 no, porque con 48 se pueden formar 6 grupos de 7 y sobran 6 unidades, no alcanza para armar otro grupo de 7.

Es interesante pedirles a los alumnos que analicen qué sucede cuando se suma un múltiplo de 7 con un número que no es múltiplo de 7. Una explicación podría ser:

- 7 entra una cantidad exacta de veces en un múltiplo de 7
- En el caso de un número que no es múltiplo de 7, el 7 entra una cierta cantidad de veces y sobran unidades.

- Si se suman los números, la cantidad de veces que entra el 7 es la suma de la cantidad de veces que entra en cada uno de los números, pero siguen sobrando las unidades. Esto significa que el resultado no es un múltiplo de 7.

Por ejemplo, 188 = 140 + 48.

7 entra 20 veces en 140 (7×20=140) y con 48 se pueden armar 6 grupos de 7 y quedan 6 sueltos (48=7×6+6). Entonces si se suman 140 y 48 resulta:

$$
\begin{aligned}
188 &= 140 + 48 \\
&= 7\times20 + 7\times6+6
\end{aligned}
$$

Esta expresión indica que hay veintiséis sietes (20 de 140 y 6 de 48) y sobran 6 unidades, luego, 188 = 7×26+6

Otros niños podrán apelar a la división entera entre 188 y 7. Se puede dividir partiendo el 188 = 140 + 48. Si 48 tiene un resto de 6 al ser dividido por 7, 188 también va a tener el mismo resto, porque 140 es múltiplo de 7. Por lo tanto 188 no es múltiplo de 7.

ANEXO

En esta sección se presenta una colección de juegos referidos a la primera y segunda parte. En cada juego presentamos los objetivos, la organización de la clase, los materiales y las reglas para jugar. Efectuamos también algunos comentarios.

Juego 1 - Damero de 15[16]

Objetivos del juego: reconocer tres sumandos que den 15.

Acrecentar el dominio de cálculos simples, en este caso, sumas de tres números que den 15.

Organización de la clase: se juega de a dos.

Materiales: una banda numérica del 1 al 9. Tres fichas blancas y tres fichas negras.

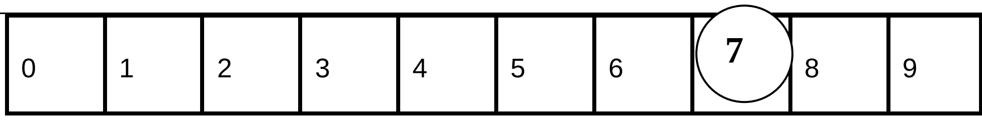
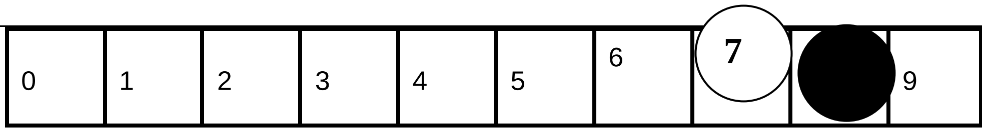
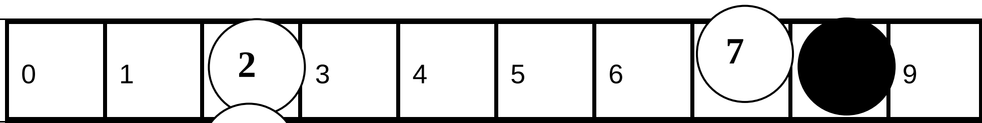
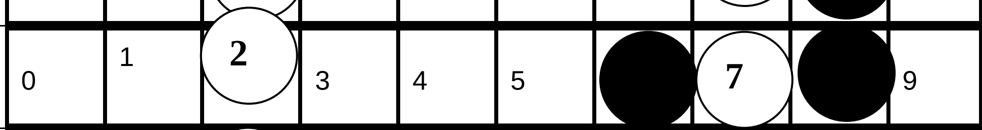
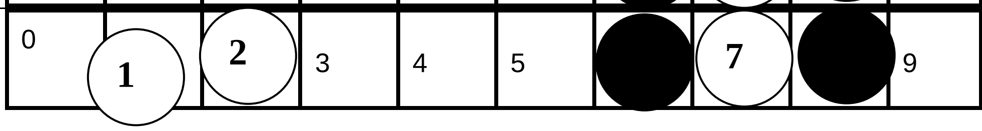
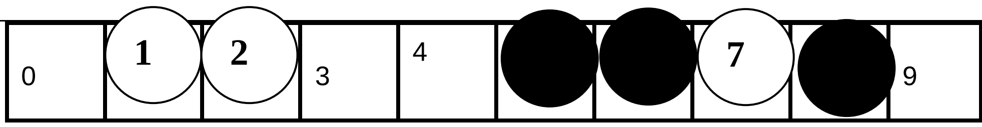
Reglas del juego: cada jugador dispone de las fichas de un color. Cada uno, por turno, pone una de las fichas sobre un casillero libre. En cada casillero se puede poner una sola ficha. El objetivo es sumar 15 con los números de las casillas que cada uno fue ocupando. Si ninguno de los dos sumó 15 una vez que ubicaron todas las fichas, cada uno por turno mueve una de las fichas a un casillero libre. Gana el jugador que primero obtenga 15.

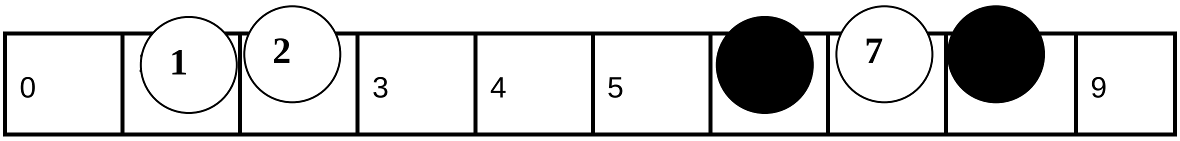
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**

Por ejemplo:

Edgardo juega con las fichas blancas y Leandro con las fichas negras.

[16] Extraído de Groupe National Mathématiques / F.Boule. Jeux nombres. Creador del juego: Martin Gardner.

Edgardo ubica su ficha en el 7	
Leandro coloca su ficha en el 8.	
Edgardo en el 2.	
Leandro juega 6.	
Edgardo juega 1(porque si no lo ocupa, Leandro llega a 15).	
Leandro ocupa el 5 para que Edgardo no sume 15	



Como actividad para después de jugar será necesario un trabajo colectivo que apunte a hacer listas de ternas de números que suman 15, de modo que los alumnos puedan reconocer el conocimiento que subyace en el juego.

Juego 2 - Gana el que tiene más puntos[17]

Objetivos: buscar estrategias para ganar a través de la realización de sumas y anticipaciones de posibles jugadas.

Materiales: una tabla con números, como por ejemplo, la siguiente:

4	6	3	3	1

[17] Extraído de Groupe National Mathématiques / F.Boule. Jeux des nombres. Creador del juego: Pascal Pluchon.

7	9	2	7	7
7	5	4	10	8
8	3	8	7	10
2	6	3	5	1

Organización de la clase: se juega de a dos.

Reglas del juego: el juego consiste en elegir, entre los números de la tabla, un número que será el puntaje que se obtendrá en cada ronda. El primer jugador elegirá sus puntajes en las filas, mientras que el segundo lo hará en las columnas. Se comienza eligiendo el primer puntaje en la fila central.

El primer jugador elige un número de su fila, que será su primer puntaje, y lo tacha. El segundo jugador debe jugar en la columna correspondiente al casillero seleccionado por el primer jugador, elige un número que será su puntaje y también lo tacha. Después, el primer jugador elige un número sobre la fila correspondiente al casillero seleccionado por el otro jugador, lo suma a su puntaje anterior y lo tacha, y así sucesivamente. Si uno de los jugadores no puede jugar, pasa esa vuelta.

Cuando los números de la tabla estén todos tachados o bien cuando sea imposible seguir jugando, se termina el juego. Gana el que tiene más puntos.

Ejemplo:

Supongamos que Luciana juega contra Matías. Uno va a jugar sobre las filas, y el otro sobre las columnas. Se inicia el juego por la fila central.

Tabla para jugar

4	6	3	3	1
7	9	2	7	7
7	5	4	10	8
8	3	8	7	10
2	6	3	5	1

Luciana elige **10** en la fila central.

4	6	3	3	1
7	9	2	7	7
7	5	4	**10**	8
8	3	8	7	10
2	6	3	5	1

En la columna del 10 **Matías** elige el **7** que está arriba.

4	6	3	3	1
7	9	2	**7**	7
7	5	4		8
8	3	8	7	10
2	6	3	5	1

En la fila del 7, **Luciana** elige el **9**.

4	6	3	3	1
7	**9**	2		7
7	5	4		8
8	3	8	7	10
2	6	3	5	1

En la columna del 9, **Matías** elige el **6** que está arriba.

4	**6**	3	3	1
7		2		7
7	5	4		8
8	3	8	7	10
2	6	3	5	1

Puntajes parciales	**Lu**	**Mati**	**Lu**	**Mati**	**Lu**	**Mati**	**Lu**	**Mati**
	10	0	10	7	19	7	19	13

En la fila del 6, **Luciana** elige el **4**.

En la columna del 4 **Matías** elige el **7** que está arriba.

En la fila del 7, **Luciana** elige **7**.

En la columna el 7, **Matías** elige **10**.

En la fila del 10, **Luciana** elige el segundo **8**.

4		3	3	1
7		2		7
7	5	4		8
8	3	8	7	10
2	6	3	5	1

		3	3	1
7		2		7
7	5	4		8
8	3	8	7	10
2	6	3	5	1

		3	3	1
		2		**7**
7	5	4		8
8	3	8	7	10
2	6	3	5	1

		3	3	1
		2		
7	5	4		8
8	3	8	7	**10**
2	6	3	5	1

		3	3	1
		2		
7	5	4		8
8	3	**8**	7	
2	6	3	5	1

Lu	**Mati**	**Lu**	**Mati**	**Lu**	**Mati**	**Lu**	**Mati**	**Lu**	**Mati**
24	13	24	20	31	20	31	30	39	30

En la columna del 8, **Matías** elige el **3** que está arriba.

En la fila del 3, **Luciana** elige el **3**.

En la columna del 3**, Matías** elige **7**.

En la fila del 7, **Luciana** elige **8**.

En la columna del 8, **Matías** elige **7**.

		3	3	1
		2		
7	5	4		8
8	3		7	
2	6	3	5	1

			3	1
		2		
7	5	4		8
8	3		7	
2	6	3	5	1

				1
		2		
7	5	4		8
8	3		**7**	
2	6	3	5	1

				1
		2		
7	5	4		8
8	3			
2	6	3	5	1

				1
		2		
7	5	4		8
	3			
2	6	3	5	1

Lu	**Mati**	**Lu**	**Mati**	**Lu**	**Mati**	**Lu**	**Mati**	**Lu**	**Mati**
39	33	42	33	42	40	50	40	50	47

En la fila del 7, **Luciana** elige **8**.

En la columna del 8, **Matías** elige el **1** que está arriba.

En la fila del 1, **Luciana** no puede jugar, y debe pasar su turno.

Matías puede elegir cualquier columna, entonces, en la tercera columna, elige **2**.

En la fila del 2 **Luciana** no puede jugar y pasa su turno.

				1
		2		
	5	4		**8**
	3			
2	6	3	5	1

				1
		2		
	5	4		
	3			
2	6	3	5	1

		2		
	5	4		
	3			
2	6	3	5	1

		2		
	5	4		
	3			
2	6	3	5	1

	5	4		
	3			
2	6	3	5	1

Lu	**Mati**	**Lu**	**Mati**	**Lu**	**Mati**	**Lu**	**Mati**	**Lu**	**Mati**
58	47	58	48	58	48	50	50	50	50

Matías puede elegir cualquier columna, entonces en la segunda, elige **3**.

Luciana pasa su turno.

En la segunda columna, **Matías** elige **5**.

Luciana debe tachar **4**.

Matías debe tachar 3.

	5	4		
	3			
2	6	3	5	1

	5	4		
2	6	3	5	1

	5	4		
2	6	3	5	1

		4		
2	6	3	5	1

2	6	**3**	5	1

Lu	Mati	Lu	Mati	Lu	Mati	Lu	Mati	Lu	Mati
50	53	50	53	50	58	54	58	54	61

En la fila del 3, **Luciana** elige **6**.

Matías no puede seguir jugando, se termina el juego.

2	**6**		5	1

2			5	1

Lu	Mati	Lu	Mati
60	61	60	61

Matías resulta ganador porque obtiene mayor puntaje.

Comentarios: al poner en discusión los procedimientos utilizados, se espera retener las siguientes cuestiones:

Como la elección de un casillero permite saber en qué línea jugará el contrincante, se pueden anticipar sus posibles jugadas. Por ejemplo, Matías en su primera jugada elige el 7 de abajo y no el de arriba porque en la horizontal correspondiente, el 9 es el número mayor. Ya que si hubiese elegido el otro 7, Luciana podría haber tenido 10 puntos en lugar de 9 en su próxima jugada. Esta elección beneficiaría a Luciana.

No necesariamente será más beneficioso elegir el número más grande, sino que la elección va a depender de los números que intervengan en la línea que se elija.

Sería interesante proponer a los alumnos diseñar ellos mismos una tabla para jugar. Como profundización podría pedirse a los niños que diseñen una tabla de manera tal que alguno de los jugadores no tenga posibilidades de ganar.

Juego 3 - Juego de las descomposiciones

Objetivos del juego: utilizar distintas escrituras de un número.

Materiales: un mazo de 21 cartas para cada pareja. Cada mazo se fabrica de la manera siguiente: se eligen, por ejemplo, 7 números y tres descomposiciones diferentes para cada número. Las cartas se escriben de los dos lados. De un lado el número y del otro lado alguna descomposición correspondiente a ese número.

Ejemplo de un posible mazo de cartas:

A continuación se proponen 7 números para escribir sobre un lado de las cartas:

17	25	46	56	79	81	92

Con cada uno de los números anteriores se fabrican 3 cartas distintas. En cada una de ellas, de un lado aparece el número y del otro una descomposición del número dado.

Por ejemplo para el 17: de un lado de la carta se escribe el número 17 y del otro lado de la misma carta, una de las tres descomposiciones propuestas en la primera columna de la tabla siguiente. Se procede del mismo modo con las otras dos descomposiciones propuestas para el 17.

10 + 7	30 - 5	100 – 50 - 4	100 – 40 -4	40 + 40 - 1	90 -9	100 – 10 + 2
20 – 3	35 - 10	50 - 4	35 + 21	70 + 9	85 - 4	95 - 3
100– 80 - 3	100 - 75	25 + 25 - 4	55 + 1	75 + 4	100 – 20+1	100 – 5 - 3

Organización de la clase: se divide la clase en grupos de tres. Dos alumnos juegan y otro alumno ayuda a decidir quién gana. Se intercambian los roles.

Reglas del juego: se colocan todas las cartas distribuidas sobre la mesa mostrando la cara con la descomposición del número y los números hacia abajo. Cada jugador, en su turno, elige una carta y le propone un cálculo al otro jugador, quien debe responder cuál es el número en cuestión. Si responde bien, se lleva la carta. Si no, la carta se la lleva el jugador que la eligió. En cada jugada, se consulta al jugador encargado de ayudar a decidir quién gana. Se termina el juego cuando no hay más cartas sobre la mesa. Gana el jugador con mayor cantidad de cartas.

Comentarios: a la hora de resolver un cálculo, sería deseable que los alumnos dispongan de diferentes formas para descomponer los números, de manera que puedan adaptar la descomposición al cálculo que se propone. Por ejemplo, para calcular 58 + 27 y movilizar rápidamente la descomposición 27 = 30 – 3 (o 27 = 2 + 25), ésta debería estar disponible[18].

Luego del debate colectivo, el docente puede proponer las siguientes actividades.

Decidan cuál o cuáles de las descomposiciones propuestas para cada número son correctas. Para cada caso, propongan una explicación.

Número			
279	200 + 80 – 1	140 + 140 – 2	300 – 30 – 9
389	400 – 20 - 1	150 + 150 + 45 + 45 + 1	300 + 90 – 1

Si bien una justificación posible radica en que las respuestas incorrectas no dan el mismo resultado que el número dado, no explican por qué es así.

Un razonamiento que puede aparecer es el siguiente: 300 – 30 – 9 = 270 – 9, y es menor que 279, entonces 300 – 30 – 9 no es una respuesta correcta.

Para que los alumnos comiencen a elaborar razonamientos como el anterior se necesitará que la planificación elaborada por el docente incluya actividades que tengan por finalidad trabajar sobre las explicaciones.

Otra actividad posible:

Consigna: completar los lugares vacíos

53 – 19 = ….- 20	176 – 99 = …..- 100	243 - 199 = ….- 200

Una estrategia que nos interesa trabajar aquí es la de sumar 1 a cada uno de los términos a fin de lograr un cálculo más fácil de resolver.

[18] Ejemplo extraído de: Denis Butlen- Monique Charles- Pézard IUFM De Créteil, Université Paris 12 Equipe DIDIRIEM, Université Paris 7- Denis Diderot, “Conceptualización en matemática y alumnos en dificultad el cálculo mental, entre sentido y técnica“. Revista *Grand N* Nº 79. 2007.

Puntualicemos que hay algunas estrategias que si bien son correctas, no resultan convenientes para realizar un cálculo mental. Por ejemplo: 33 + 27= 33 + 28 – 1

La siguiente es otra actividad para reflexionar acerca de distintos procedimientos de resolución:

Consigna: para encontrar el resultado de 567 – 279, cuatro chicos hicieron procedimientos distintos. ¿Cómo explicarían el procedimiento de cada uno?

- ✓ Maximiliano

567 – 279 = 567 – 200 – 70 – 9
= 367 – 70 – 9
= 367 – 60 – 10 – 9
= 307 – 10 – 9
= 297 - 9
= 297 - 7 - 2
= 290 – 2
= 288

- ✓ María

567 – 279 = 567 – 200 – 60 – 10 – 7 – 2
= 300 – 10 – 2
= 290 – 2
= 288

- ✓ Jonathan

567 – 279 = 500 – 200 + 60 – 70 + 7 – 9
= 400 – 200 + 160 – 70 + 7 – 9
= 200 + 90 + 7 – 9
= 290 + 7 – 9
= 280 + 17 – 9
= 280 + 8
= 288

- ✓ Bárbara

567 – 279 = 500 – 200 + 67 – 79

= 300 + 67 – 79

= 200 + 167 – 79

= 200 + 160 – 70 + 7 – 9

= 200 + 90 + 7 – 9

= 280 + 17 – 9

= 280 + 8

= 288

Juego 4 - Telegrama

Juego 4 Telegrama[19]

Objetivos: identificar distintas escrituras de un número.

Materiales: hoja previamente plegada sobre la que se ha escrito un número.
Organización de la clase: se arman equipos de 4 alumnos.

Reglas del juego: en cada equipo un alumno recibe una hoja con un número escrito, lo escribe de otra forma y pliega la hoja a fin de ocultar la escritura. El alumno siguiente anota una escritura diferente y oculta la anterior. Cada alumno solo puede ver la última escritura.

Cuando la hoja está completa, se la despliega y se comparan las escrituras producidas.

Se asigna un puntaje a las escrituras producidas según la cantidad de signos operatorios que intervengan. Para una escritura correcta: un signo + vale 1 punto, un signo – vale 2 puntos, un signo x vale 3 puntos y un signo de: vale 4 puntos.

Ejemplo:

Supongamos que sobre la hoja está escrito el número 3248.

El primer alumno escribe 3248 de otra manera, por ejemplo 3000 + 248. Dobla la hoja, ocultando el 3248. De este modo el próximo jugador solo puede ver 3000 + 248.

[19] Denis Butlen- Monique Charles- Pézard IUFM De Créteil, Université Paris 12 Equipe DIDIRIEM, Université Paris 7- Denis Diderot, “Conceptualización en matemática y alumnos en dificultad el cálculo mental, entre sentido y técnica“. Revista *Grand N* Nº 79. 2007.

El alumno siguiente escribe de otra forma 3000 + 248, por ejemplo 3 x 1000 + 248 y oculta la escritura anterior (3000 + 248).

El alumno que juegue en tercer lugar escribe 3 x 1000 + 248 de otra manera, por ejemplo, 3 x 1000 + 250 – 2. Pliega la hoja, oculta 3 x 1000 + 248 de tal modo que el cuarto jugador solo puede ver, 3 x 1000 + 250 – 2.

Cuando la hoja está completa, se la desdobla y se comparan las escrituras producidas.

Bibliografía

- ✓ Circunscripción Caen-sur. Animación Cálculo mental Ciclo 3. Marzo de 2008.

- ✓ Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología. Aportes para el seguimiento del aprendizaje en procesos de enseñanza. Primer Ciclo EGB/ Nivel Primario. 2006.

- ✓ Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología. Aportes para el seguimiento del aprendizaje en procesos de enseñanza. Segundo Ciclo EGB/ Nivel Primario. 2008.

- ✓ F. Boule / Progression Calcul mental. 2006.

- ✓ Broitman C., Escobar M., Etchemendy M., Novembre A., Sancha I., Estudiar Matemática en 4º, 5º y 6º. Editorial Santillana. 2008.

- ✓ Denis Butlen- Monique Charles- Pézard IUFM De Créteil, Université Paris 12 Equipe DIDIRIEM, Université Paris 7- Denis Diderot, "Conceptualización en matemática y alumnos en dificultad el cálculo mental, entre sentido y técnica". Revista *Grand N* Nº 79. 2007.

- ✓ Charlot Bernard La epistemología implícita en las prácticas de enseñanza de las matemáticas, *conferencia dictada en Cannes.* 1986.

- ✓ F. Boule. Groupe national Mathématiques. Fiches d'activité Jeux sur les nombres, fractions et décimaux, calculettes. 2003. Disponible en: http://eduscol.education.fr/cid47906/jeux-sur-les-nombres.html (consultado en agosto de 2010).

- ✓ Dirección de Currícula (2005) Cálculo Mental con Números Naturales. Plan Plurianual. Ministerio de Educación. GCBA. Coordinación autoral: Patricia Sadovsky. Elaboración del material: María Emilia Quaranta y Héctor Ponce. Disponible en: www.buenosaires.gov.ar

- ✓ Dirección General de Cultura y Educación, Dirección Provincial de Educación Primaria. Pcia. de Bs. As. "*Diseño Curricular para la Educación Primaria".* Primer Ciclo y Segundo Ciclo. 2008. Disponible en el *Portal abc*: www.abc.gov.ar

- Documents d'accompagnement des programmes. Mathématiques École primaire. Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche. Direction de l'enseignement scolaire. 2005.
- Ermel Apprentisages numériques et résolution de problémes. 1991.

- G.C.B.A. Secretaría de Educación. Dirección General de Planeamiento. Dirección de Currícula. Matemática. Cálculo mental con números naturales. Apuntes para la Enseñanza.

- Parra Cecilia y Saiz Irma Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones. Capítulo Vll. Paidós Educador. 1994.

- Parra Cecilia y Saiz Irma. *Enseñar aritmética a los más chicos*. De la exploración al dominio. Homo Sapiens ediciones. 2007.

- Marie-Lise Peltier Nicolas De Kocker. Le calcul mental à l'école et en formation des maîtres Séminaire COPIRELEM Nouveaux formateurs Istres novembre. 2007.

- Quaranta, María Emilia; Ressia de Moreno, Beatriz. "Hacia una propuesta de alfabetización en Matemática" RAE (Red de Apoyo Escolar y Educación Complementaria). 2003.

- Quaranta, María Emilia; Ressia de Moreno, Beatriz. *Matemática para que aprendan todos. Numeración escrita y cálculo mental en primer ciclo.* Una experiencia en Centros de Apoyo Escolar. Buenos Aires: Red de apoyo escolar. 2006.

- Rabino - A. Bressan - F. Gallego- B. Zolkower. GPDM. *Juego calculando, calculo jugando.* Terceros y cuartos años de la EGB. 2004.

- Sadovsky, Patricia. Enseñar Matemática Hoy. Libros del Zorzal. 2005.

Provincia de Buenos Aires

Gobernador
Sr. Daniel Scioli

Vicegobernador
Dr. Alberto Balestrini

Director General de Cultura y Educación
Prof. Mario Oporto

Vicepresidente 1º del Consejo General de Cultura y Educación
Prof. Daniel Lauría

Subsecretario de Educación
Lic. Daniel Belinche

Director Provincial de Educación Primaria
Prof. María de las Mercedes González

Dirección General de
Cultura y Educación

Buenos Aires
LA PROVINCIA

DGCyE / Dirección Provincial de Educación Primaria
Torre Gubernamental 1, calle 12 y 50, piso 11.
(0221) 429 5291
dep@ed.gba.gov.ar
www.abc.gov.ar