Dirección General de Cultura y Educación
Gobierno de la Provincia de Buenos Aires

Subsecretaría de Educación

Dirección Provincial de Educación Primaria
Dirección de Gestión Curricular

Serie Curricular

MATEMÁTICA Nº 5 A

Operaciones con números naturales (2º Parte)

propuestas para alumnos de 3º y 4º año

Material para el docente

Año 2007

Provincia de Buenos Aires
Gobernador

Ing. Felipe Solá

Directora General de Cultura y Educación

Dra. Adriana Puiggrós

Vicepresidente 1°del Consejo General de Cultura y Educación

Lic. Rafael Gagliano

Jefe de Gabinete

Lic. Luciano Sanguinetti

Subsecretario de Educación

Ing. Eduardo Dillon

Directora Provincial de Educación Primaria

Prof. Mirta Torres

Directora de Gestión Curricular

Lic. Patricia Garavaglia

Este material se utiliza en el marco del
Proyecto “Propuestas Pedagógicas para alumnos con sobreedad”

Corresponde a la Tercera Secuencia
Matemática: “Operaciones con números naturales”
(2º Parte)
Autora: Verónica Grimaldi
Coordinación: Claudia Broitman

Dirección Provincial de Educación Primaria
Dirección de Gestión Curricular
Dirección de Psicología Comunitaria y Pedagogía Social

Tercera secuencia de trabajo

Índice

Fundamentación

Esta publicación está dividida en dos partes. La primera contiene una serie de actividades sobre diversos aspectos relacionados con la enseñanza de las operaciones aritméticas en el conjunto de los números naturales; la segunda, se organiza en torno a la enseñanza de algunas cuestiones de Geometría. La mayoría de las actividades que se presentan han sido diseñadas en base a la propuesta del Diseño Curricular Provincial para el 4° año de EPB.
La secuencia hará foco sobre:

- La resolución de cálculos mentales horizontales de multiplicaciones y divisiones con números "redondos", analizando diversas composiciones y descomposiciones posibles de los números para operar con ellos.
- La investigación de las relaciones numéricas y propiedades en la tabla pitagórica. Memorización posterior de resultados.
- El uso y análisis de los algoritmos de la multiplicación y la división por una y dos cifras a partir de procedimientos diversos con escrituras de operaciones intermedias y apelando a las relaciones establecidas en la tabla pitagórica.
- La utilización de la calculadora para:
    - resolver problemas,
    - controlar cálculos realizados por otros procedimientos,
    - verificar relaciones anticipadas entre números y operaciones.
- La resolución de problemas de multiplicaciones y divisiones que impliquen diferentes sentidos de estas operaciones, que involucren varias operaciones y diferentes modos de presentación de la información.
- La resolución de problemas que exijan poner en juego las nociones de círculo y circunferencia.
- El estudio de características de triángulos.
- La exploración y el uso del compás y el transportador.
- La medición y comparación de ángulos.

Introducción

La selección de problemas que se presenta está ordenada del mismo modo que en el material para el alumno. Sin embargo, sólo se han incluido algunos de los problemas de dicho material para realizar un análisis más detallado.

1° parte: Multiplicaciones con números que terminan en cero

El estudio de la multiplicación por la unidad seguida de ceros es no sólo una nueva oportunidad para analizar características de nuestro sistema de numeración, sino también para construir estrategias de cálculo que ponen en juego propiedades de los números y de las operaciones. Además, constituye un aporte importante para el análisis de los algoritmos de multiplicación y división.

A continuación se presentan problemas en los se analizan las características de las multiplicaciones por 10 y sus potencias:

Problemas 1, 2, 3 y 6

1) ¿Cuáles son los resultados de las siguientes multiplicaciones? Podés usar la calculadora para verificar.

a) 5 x 10 =	b) 7 x 10 =	c) 9 x 10 =
d) 10 x 10 =	e) 12 x 10 =	f) 15 x 10 =
g) 45 x 10 =	h) 112 x 10 =	

2) ¿ Cuáles son los resultados de las siguientes multiplicaciones? Podés usar la calculadora para verificar.

a) 5 x 100 =	b) 7 x 100 =	c) 9 x 100 =
d) 10 x 100 =	e) 12 x 100 =	f) 15 x 100 =
g) 45 x 100 =	h) 112 x 100 =	

3) **Para hacer de a dos o de a tres:**

a) En el cuadro del problema 1), cada resultado "se parece" al número que se multiplica por 10. ¿En qué se parecen? Intenten explicar por qué pasa esto.

b) ¿Pasa algo parecido en el cuadro del problema 2)? Intenten explicarlo

Para hacer entre todos:

Escriban una regla que muestre qué sucede al multiplicar por 10 y por 100 e intenten analizar por qué creen que "pasa lo que pasa".

6) ¿Por cuánto se ha multiplicado en cada caso? Podés verificar tus respuestas con la calculadora.

a) 36 x …….. = 3.600
b) 235 x ……. = 2.350
c) 22 x …….. = 22.000
d) 31 x …….. = 310

Es habitual que los niños rápidamente encuentren la regularidad de agregar ceros, pero no les es tan sencillo entender por qué sucede. Este análisis es el que se propone para hacer entre todos en el problema 3), luego de haber explorado con los dos primeros problemas. El maestro favorecerá la circulación de ideas, y orientará la discusión en torno a explicaciones como: "al multiplicar por 10, cada unidad se convierte en una decena"

En una primera puesta en común podrían aparecer reflexiones como:

- ✓ *Cuando se multiplica un número por 10, el resultado es el mismo número y se le agrega un cero al final;*
- ✓ *cuando se multiplica por 100, el resultado es el mismo número y se le agregan dos ceros al final;*

Podría indagarse qué ocurre con otros números. Por ejemplo, el maestro podría preguntar: *"¿Se imaginan cómo será el resultado de 5 x 1.000? ¿Y de 5 x 10.000?"*

El estudio de esta regularidad no sólo apunta a que los niños puedan utilizarla para realizar cálculos. La elaboración de conjeturas, explicaciones, fundamentaciones, comprobar si vale para todos los casos, etc, constituye una parte central del trabajo matemático que queremos propiciar.

El maestro podría someter a debate algunos casos particulares para poner en duda las ideas y alentar la necesidad de buscar mejores explicaciones. Por ejemplo, podría proponer si con números como el 103 x 10 no será 1003 ó 1300, etc.

Otros problemas hacen foco en las propiedades de la multiplicación por múltiplos de las potencias de 10:

Problemas 7 y 8

7) Una caja de marcadores cuesta $6. Completá el siguiente cuadro para saber cuánto costarán las cantidades que se indican:

Cantidad de cajas	1	10	20	30	40	60	100	200	300	400
Precio $	6									

8) Resolvé los siguientes cálculos.

7 x 10 =	2 x 100 =
7 x 20 =	2 x 200 =
7 x 30 =	2 x 300 =
7 x 40 =	2 x 400 =

Algunos alumnos podrían utilizar el algoritmo de la multiplicación para resolver; otros quizás pongan en juego la regularidad estudiada en los problemas anteriores, y deberán extender dicha relación a qué sucede al multiplicar por 20, 30, etc. En este caso, no sólo se agrega un cero al final sino que se duplica, triplica, etc, el valor del resultado respecto de lo que ocurría con 10 y con 100.
En la resolución del problema 7 los niños podrían utilizar lo estudiado a propósito de otros problemas que vinculan series proporcionales en tablas de valores, e ir sumando de a 10, o procediendo por dobles, triples, etc. Es recomendable que puedan verificar sus resultados utilizando la calculadora. La actividad debe enfocarse en la discusión y las conclusiones que se puedan registrar en torno a los resultados de estas multiplicaciones.

Podrían aparecer reflexiones como:
- ✓ al hacer 7 x 20 me dio como 7 x 2, pero con un cero al final
- ✓ 7 x 20 es el doble de 7 x 10
- ✓ para hacer 7 x 30 hago 7 x 3, y luego por 10
- ✓ etc.

Si los alumnos no tienen totalmente disponibles en memoria los resultados de las multiplicaciones de la tabla pitagórica, el maestro podría sugerir que se fijen allí qué productos pueden ayudarlos.
Será interesante discutir la validez general de estas observaciones, es decir, propiciar el análisis de que por ejemplo al mutiplicar cualquier número por 20 el resultado es como hacer ese número por 2 y luego por 10. Nuevamente, el trabajo de exploración de este tipo de afirmación con la calculadora permitirá a los niños inventar muchos ejemplos para analizar si se cumple en todos los casos. Podría utilizarse un cuadro como el siguiente para que los alumnos puedan registrar sus cálculos y extender la regularidad a otros casos:

Si el número es	**Al multiplicarlo por 2 da**	**Al multiplicarlo por 20 da**
7	14	140
2	4	40
…..	…..	……

Se podrían construir tablas similares para otras multiplicaciones (por 30, por 200, etc).
Si bien el hecho de que ocurra con todos los ejemplos que se inventen es un indicador de la existencia de una regularidad, esto no explica el por qué de su validez. Con la intención de analizar y dejar un registro de estas razones, se presenta el cartel informativo:

***Para tener en cuenta**: Para multiplicar por 20 sirve pensar en que 20 = 2 x 10. Por lo tanto, multiplicar por 20 es lo mismo que multiplicar primero por 2 y luego por 10. Por ejemplo, 8 x 20 se puede pensar como 8 x 2 = 16 y 16 x 10 = 160. Para multiplicar por 200 se puede multiplicar por 2 y luego por 100; por ejemplo, 8 x 200 se puede hacer así: 8 x 2 = 16; 16 x 100 = 1.600*

En los problemas que se presentan a continuación, se amplía el alcance de estas observaciones:

Problemas 9, 10 y 11

9) Resolvé las siguientes multiplicaciones:

Sabiendo que 3 x 8 = 24	Sabiendo que 2 x 9 = 18
3 x 80 =	20 x 9 =
3 x 800 =	200 x 9 =

10) Sabiendo que 6 x 9 = 54, calculá:

60 x 9 = 600 x 9 = 6 x 90 = 6 x 900 = 60 x 90 =

11) Comenten en parejas cuáles de los siguentes cálculos pueden resolverse haciendo 4 x 2 x 10.
4 x 20   40 x 2   8 x 10   3 x 20   4 x 12

Los problemas 9 y 10 propician el análisis de que distintas multiplicaciones pueden ser equivalentes. Así, puede analizarse que por ejemplo los cálculos 60 x 9 y 6 x 90 tienen el mismo resultado puesto que se derivan de la multiplicación 6 x 10 x 9 y 6 x 9 x 10 que es la misma cuenta escrita en orden diferente. En estos razonamientos se ponen en juego de modo implícito las propiedades conmutativa y asociativa.
La inclusión de la cuenta 60 x 90 permite reutilizar las observaciones hechas hasta el momento, en un nuevo problema. Se trata aquí de distinguir que al resultado de la cuenta 6 x 9 habrá multiplicarlo por 100, debido a que 60 x 90 = 6 x 10 x 9 x 10 = 6 x 9 x 100. Aún si los alumnos no pudieran escribir por sí mismos este razonamiento, el maestro podría guiarlos para establecer estas relaciones en forma oral, y ser él quien lo escriba en forma de cálculo. Por ejemplo, los niños podrían decir: “60 es 6 x 10 y 90 es 9 x 10. Entonces, si multiplicás 60 x 90 es como 6 x 9 pero con el 10 dos veces, por eso son dos ceros”.

El objetivo del problema 11 es que los alumnos puedan identificar que agrupando factores de distintas maneras pueden obtener multiplicaciones que dan lo mismo:

4 x 2 x 10

4 x 20

4 x 2 x 10

40 x 2

El cálculo 4 x 12 propicia la discusión en torno a que si bien 12 = 10 + 2, multiplicar por 12 no equivale a multiplicar primero por 10 y luego por 2. Será interesante dedicar un tiempo a analizar esta cuestión, y distinguirla de otras que sí son válidas, y que involucran el uso implícito de la propiedad distributiva. Este es el objetivo de los problemas que se proponen a continuación:

Problemas 12, 13 y 14

12) **Para hacer de a dos:** Joaquín dice que la cuenta 6 x 4 x 10 da lo mismo que 10 x 10, porque 6 + 4 = 10. Jorge dice que la cuenta 6 x 4 x 10 da lo mismo que 24 x 10 porque 6 x 4 = 24. ¿Quién tiene razón? Verifiquen con la calculadora si lo que pensaron es correcto.

13) Decidí cuál de estos cálculos dan como resultado lo mismo que 20 x 35:

20 x 30 + 5   20 x 5 x 30   20 x 7 x 5   20 x 5 x 7   20 x 30 + 20 x 5

Verificá tus respuestas con la calculadora.

14) ¿Cuáles de los siguientes cálculos se pueden resolver haciendo 7 x 2 x 100?

700 x 2 =   9 x 100 =   7 x 200 =   14 x 100 =

El problema 12 propone en forma explícita la discusión en torno a dos estrategias que implican la agrupación del 6 con el 4. Será interesante discutir que aún siendo verdadera la afirmación 6 + 4 = 10, no es una suma la cuenta que está propuesta en el cálculo horizontal, sino la multiplicación 6 x 4. La generalización de esta observación podría propiciar que los niños descartaran de entrada todas las expresiones con sumas en el problema 13. El hecho de que en este caso el cálculo 20 x 30 + 20 x 5 tiene el mismo resultado que 20 x 35 será una buena razón para estudiar cuándo una expresión con sumas puede o no ser rechazada.
Si los niños utilizaran calculadora, el maestro deberá estar atento a que no realicen el último cálculo “de corrido”. Si bien no se apunta aquí a estudiar la jerarquía de las operaciones, será conveniente que el maestro aclare que la expresión significa que hay que sumar los productos (y por lo tanto se deberán realizar primero las multiplicaciones por separado, con la calculadora si es necesario).

Se pueden retomar aquí algunas de las observaciones que se habían hecho a propósito de los resultados de la tabla pitagórica. Por ejemplo, se podría volver sobre el problema 9 de la 4° parte de la secuencia 2 (problemas para usar la tabla pitagórica), en el que se han discutido diferentes modos de resolver un mismo cálculo, algunos de los cuales involucran la suma o la resta de ciertos resultados. Se podría también leer el cartel "Para tener en cuenta" que precede a dicho problema, de modo de reutilizar dichas estrategias en estas nuevas situaciones.

Podría ser interesante explicitar las razones por las cuales, por ejemplo, 20 x 30 + 5 no es equivalente a 20 x 35, mientras que 20 x 30 + 20 x 5 sí lo es. Los alumnos podrían decir que *"en 20 x 30 + 20 x 5 se multiplica por 20 al 30 y al 5 que forman el 35; en cambio en 20 x 30 + 5 solamente se multiplica por 20 al 30 del 35. Pero hay que multiplicar a todo el 35 por 20, por eso esta cuenta no da lo mismo".*

El problema 15 retoma las relaciones numéricas puestas en juego en esta sección y propicia su ampliación a números más grandes:

Problema 15

¿Qué números van apareciendo en el visor de la calculadora si se oprimen las siguientes teclas?

13 x 10 x 10 x 10 =

¿Y si se oprime una vez más x 10?
¿Y si se oprime tres veces más x 10? ¿Cómo se escribiría ese número?

Se podría analizar también que las multiplicaciones propuestas son equivalentes a 13 x 1.000, 13 x 10.000, etc.

2° parte: Problemas con cálculos mentales

Se propone en esta sección el uso y análisis de diferentes estrategias para resolver cálculos, basadas en las propiedades de los números y de las operaciones.

El primer problema apunta a discutir criterios para establecer la conveniencia del uso de la calculadora o de un cálculo mental según los números involucrados en una cuenta:

Problema 1

Si tuvieras que elegir algunos de estos cálculos para hacer mentalmente, ¿cuáles serían? ¿Por qué?

20 x 5 =	4 x 111 =
600 x 3 =	947 x 10 =
824 x 6 =	765 x 8 =
1.200 x 3 =	250 x 4 =

Podrían aparecer ideas como:

- algunos cálculos ya los sabemos de memoria
- las cuentas con números terminados en cero son fáciles
- etc.

El maestro podría proponer que inventen otros cálculos que les parezcan fáciles para hacer mentalmente y otros en los que necesiten la calculadora.
El cartel informativo que aparece a continuación de este problema apunta a tener un registro escrito de estos criterios:

***Para tener en cuenta**: Algunos cálculos son fáciles para hacer mentalmente porque ya se saben los resultados o porque involucran números que terminan en cero. Por ejemplo, es fácil saber que 18 x 10 = 180; 25 x 2 también es fácil, porque se puede recordar de memoria que da 50. Pero 18 x 37 es más difícil y conviene resolverlo haciendo alguna cuenta o usando la calculadora.*

A continuación se proponen algunos problemas en los que se vuelve a analizar estrategias de cálculo que involucran una descomposición multiplicativa de alguno de los factores:

Problemas 2, 3, 4 y 5

2) Para resolver 25 x 8 en una calculadora en la que no funciona la tecla del 8, un chico pensó así:

25 x 8 = 25 x 4 x 2

100= 100 x 2 = 200

¿Cómo podrías "desarmar" alguno de los números en las siguientes multiplicaciones como hizo este chico?

15 x 6 = ...
Si no funciona la tecla del 6 :

24 x 12 = ...
Si no funciona la tecla del 1 :

3) ¿Cuáles de los siguientes cálculos se pueden resolver haciendo 24 x 2 x 25?

48 x 25 =   26 x 25 =   24 x 27 =   24 x 50 =

4) ¿Es cierto que el resultado de 24 x 50 es la mitad del resultado de 24 x 100? ¿Cómo podrías explicarlo?

5) ¿Es cierto que el resultado de 24 x 25 es la mitad del resultado de 24 x 50? ¿Cómo podrías explicarlo?

Se espera que los alumnos puedan establecer que como 6 = 2 x 3, entonces 15 x 6 = 15 x 2 x 3, que podría resolverse como 30 x 3. El hecho de que "no funcione" la tecla del 6 fuerza a descomponer este factor y a agrupar los números involucrados en dicha descomposición de otra manera para terminar de resolver.

El problema 3 propone analizar la equivalencia entre algunos cálculos. Se apunta a que los alumnos se apoyen en la agrupación de factores para decidir, y no en la resolución de cada cálculo para establecer cuáles dan lo mismo. Podrían aparecer reflexiones como: "24 x 50 da lo mismo que 24 x 2 x 25 porque el 50 viene de 2 x 25. Pero 24 x 27 no da lo mismo porque 27 no es 2 x 25".

Para los problemas 4 y 5, se espera que los alumnos puedan identificar en que 100 = 50 x 2, por lo tanto 24 x 100 = 24 x 50 x 2 (es decir, si conocemos el resultado de 24 x 50, lo multiplicamos por 2 y obtenemos el de 24 x 100; o bien, si conocemos el resultado de 24 x 100, obtendremos 24 x 50 si lo dividimos por 2). Ambos problemas pueden apoyarse en lo analizado en el problema 3.

Los problemas que siguen apuntan a estimar resultados de algunos cálculos en base a resultados conocidos:

Problema 6

6) a) **Para hacer de a dos**: Sin hacer la cuenta, decidan cuál de los tres números está más cerca del resultado de cada cálculo

7 x 21 = El resultado más cercano es :	14 140 1.400	**9 x 32** = El resultado más cercano es:	320 32 3.200

b) Piensen qué cuentas podrían servir para decidir cerca de qué números estarán los resultados de los siguientes cálculos:
12 x 19 =   **3 x 198** =

Para resolver problemas como éste los niños tienden a hacer la cuenta en lugar de estimar el resultado, por lo que el maestro estará atento a intervenir, pudiendo sugerir por ejemplo que piensen en números redondos cercanos a alguno de los factores.

Para producir una respuesta en el ítem a), los alumnos podrían aproximar alguno de los números involucrados a números “redondos” cercanos, es decir, transformar el cálculo en una cuenta “fácil”. De este modo, por ejemplo, podrán decir que 7 x 21 es cercano a 140, dado que ese sería el resultado si la cuenta fuera 7 x 20. Luego de que se organice un debate colectivo en torno a las diferentes estarategias usadas para estimar, el docente podrá proponer que los alumnos verifiquen sus respuestas utilizando la calculadora.

El cartel informativo que aparece entre las partes a) y b) del problema 6 propone el registro de una estrategia útil para la resolución de este tipo de problemas:

***Para tener en cuenta**: A veces se puede saber cuánto da una cuenta aproximadamente pensando en algún cálculo cercano que sea fácil de hacer mentalmente. Por ejemplo, para saber el resultado aproximado de 7 x 21, se puede pensar en 7 x 20.*

Una vez que se han hecho las anticipaciones en la parte b), se pueden verificar con calculadora y comparar los resultados obtenidos con los esperados. Podría ocurrir, por ejemplo, que dijeran que para 3 x 198 pueden usar 3 x 100, pero al resolverla observar que en realidad ambos resultados son bien diferentes. En este caso será de interés que puedan analizar a qué se ha debido el error en su estimación, y registrarlo en los cuadernos. Por ejemplo: “dije 3 x 100 porque pensé en el 100 del 198, pero tendría que haber pensado en 200, porque 198 está más cerca de 200 que de 100”.

Los problemas 7 y 8 apuntan a profundizar el estudio de estas estrategias de estimación:

Problemas 7 y 8

7) Sin hacer la cuenta, ¿cuál pensás que es el resultado correcto en cada caso? Explicá cómo te diste cuenta.

a) 110 x 5 =	250	550	1.550
b) 920 x 6 =	1.520	5.520	2.751
c) 231 x 8 =	848	1.848	8.848

8) Sin hacer la cuenta, completá la tabla estimando el resultado, y explicá cómo hiciste para saber.

Cálculo	*Menor que 5.000*	*Mayor que 5.000*	*Me doy cuenta porque...*
999 x 4			
2.112 x 4			
1.998 x 3			

Para resolver el problema 7 los niños podrían pensar en que 110 x 5 debe ser del mismo orden que 100 x 5, es decir, estar cerca de 500. De este modo podrán descartar el primer y último valor. También podrían decir que 250 no puede ser porque es más chico que 100 x 5, y 110 x 5 debe dar más grande, reutilizando lo analizado en el problema 6.

El mismo tipo de análisis se espera para el problema 8, en el que podrían identificar que 999 x 4 da un número menor que 5.000 ya que ese cálculo es parecido a 1.000 x 4 que da 4.000 (y este tiene que dar menos porque 999 es más chico que 1.000).

3° parte: Más problemas para usar cálculos mentales

Al inicio de esta sección se propone un cartel en el que se informa a los niños acerca de la existencia de distintos modos de simbolizar la operación de división entre dos números:

Para tener en cuenta: Para la división pueden usarse distintos símbolos. Acá te mostramos algunos: %   ÷   :   /

A continuación, se presentan problemas que apuntan especialmente al estudio de la relación entre la multiplicación y la división:

Problemas 1, 2, 3, 4 y 5

1) a) Ya sabés que 4 x 7 = 28. Usando esa información, pensá cuánto darán estas divisiones, y verificá tus respuestas usando la calculadora:

Cálculo	Creo que el resultado es
28 : 7 =	
28 : 4 =	

b) Ahora, usando 7 x 8 = 56, ¿podés decir cuál es el resultado de estas divisiones sin hacer las cuentas?

56 : 7 =   56 : 8 =

c) Sabiendo que 6 x 9 = 54, ¿qué divisiones se pueden resolver sin hacer la cuenta?

2) Buscá en la tabla pitagórica el resultado de 7 x 9. Usando ese resultado, ¿podés decir cuánto es 63 : 9 y 63 : 7?

3) Buscá el resultado de estas divisiones en la tabla pitagórica:

81 : 9 =	64 : 8 =	42 : 7 =	27 : 3 =
49 : 7 =	42 : 6 =	18 : 9 =	18 : 6 =

4) Escribí para un compañero 4 divisiones que se puedan resolver buscando en la tabla. Después, controlen juntos las respuestas.

5) ¿Qué divisiones podés resolver a partir de la multiplicación 12 x 10? ¿Y a partir de 12 x 100?

Se intenta poner en evidencia que saber que 4 x 7 = 28 informa también que 28 : 4 = 7 y que 28 : 7 = 4. A continuación del problema 1, se presenta un cartel informativo que explicita esta relación:

Para tener en cuenta*: Saber una multiplicación permite resolver dos divisiones. Por ejemplo, conocer el resultado de 8 x 5 = 40, permite saber que 40 : 8 = 5 y que 40 : 5 = 8.*

En el problema 2 se busca reinvertir esta estrategia con el apoyo de los cálculos que aparecen en la tabla pitagórica. Podrían aparecer ideas como:

- ✓ busco en la columna del 9 dónde está el 81, y me fijo de qué fila es;
- ✓ busco en la fila del 9 dónde está el 81, y me fijo de qué columna es;
- ✓ me fijo cuánto por 9 es 81.

El problema 5 retoma cuestiones discutidas antes (multiplicación por 10 y por 100), y extiende la relación que se está estudiando a números más grandes. La utilización de números redondos favorece que el problema haga foco en la relación y no en la dificultad de los cálculos.

Los problemas 6 y 7 proponen divisiones con números terminados en cero:

Problemas 6 y 7

6) Calculá mentalmente:

10 : 2 =	20 : 2 =	30 : 3 =	50 : 5 =
100 : 2 =	200 : 2 =	300 : 3 =	500 : 5 =
1.000 : 2 =	2.000 : 2 =	3.000 : 3 =	5.000 : 5 =

¿Es cierto que hacer los cálculos de la primera fila ayuda a saber los resultados de las otras?

7) ¿Cuánto darán estas divisiones? ¿Cómo te das cuenta? Verificá tus respuestas con la calculadora.

10.000 : 2 =	20.000 : 2 =	30.000 : 3 =	40.000 : 4
100.000 : 2 =	200.000 : 2 =	300.000 : 3 =	400.000 : 4 =

En estas actividades se propicia el análisis de maneras de resolver basadas en regularidades del sistema de numeración. Será interesante que los alumnos ensayen algunas explicaciones posibles para este "comportamiento". Podrían aparecer argumentos como:

- 200 : 2 = 100 porque 100 x 2 = 200
- 200 : 2 es parecido a 20 : 2, pero con un cero más.
- si 20 : 2 = 10 entonces 200 : 2 tiene que ser 100, porque 200 es 10 veces más que 20.

En el problema 7 los niños podrían utilizar cuestiones analizadas en el problema 6 para anticipar los resultados. Por ejemplo, podrían pensar que 10.000 : 2 es parecido a 10:2; 100.000 : 2 es parecido a 100 : 2, etc.

Los problemas 8 y 9 apuntan a analizar estrategias de cálculo mental por 10 y sus potencias cuando los números terminan en cero:

Problemas 8 y 9

8) a) Resolvé las siguientes divisiones con la calculadora o mentalmente:

150 : 10 =	1.500 : 100
280 : 10 =	4.000 : 100 =
420 : 10 =	2.300 : 100 =
2.640 : 10 =	4.500 : 100 =

b) **Para discutir de a dos:** Intenten explicar este razonamiento:
"Si hay que dividir por 10 un número que termina con uno o varios ceros, se puede saber rápido el resultado. Si hay que dividirlo por 100 y termina con dos o más ceros, también se puede saber rápido".

9) a) En parejas, intenten resolver estas divisiones mentalmente. Comprueben sus resultados con la calculadora.

80 : 8 =	150 : 15 =
800 : 8 =	740 : 74 =
9.000 : 9 =	1.600 : 16 =

b) ¿Cómo pensaron estas divisiones?

Se busca retomar algunos aspectos ya estudiados sobre la multiplicación por la unidad seguida de ceros, a la vez que se utiliza nuevamente la relación entre la multiplicación y la división. Se propone el trabajo con calculadora para enfocar la atención sobre la identificación de la regularidad a partir de los resultados.

En la parte b) del problema 8 los alumnos podrían elaborar explicaciones relacionadas con multiplicaciones por 10 y por 100. Probablemente muchos alumnos encuentren dificultades para enunciar este tipo de explicación; para ayudar en la búsqueda de explicaciones, el maestro podrá propiciar el análisis del cartel informativo que se presenta a continuación, a la luz de los cálculos que se han resuelto en la parte a):

***Para tener en cuenta**: Se puede saber rápido el resultado de una división por 10 si el número termina con 0, usando lo que sabemos de las multiplicaciones por 10. Por ejemplo, 240 : 10 = 24 porque 24 x 10 = 240. Esto también sirve para saber que 240 : 24 = 10.*
Se puede pensar algo parecido para las divisiones por 100 y por 1.000. Por ejemplo, 2400 : 100 = 24 y 24.000 : 1.000 = 24.

Estos conocimientos se ampliarán en el estudio de situaciones como las que plantea el problema 10:

Problema 10

10) a) ¿Es correcto el siguiente razonamiento?

"235 : 10 da 23 y sobran 5 porque si fuera 230 : 10 daría 23 justo"

b) ¿Cómo puede usarse un razonamiento parecido al anterior para saber cuánto da y cuánto sobra en los siguientes cálculos?

122 : 10   114 : 100   205 : 100   968 : 10

Se apunta en este caso a que los niños aproximen el dividendo al número redondo anterior más cercano, para reinvertir lo que han estudiado en los problemas anteriores.

Los problemas 11 y 12 ponen en juego otras relaciones posibles entre los números involucrados en la división, de modo de utilizar de modo implícito ciertas propiedades de esta operación:

Problemas 11 y 12

11) Sabiendo que 400 : 10 = 40, ¿cuánto dará 400 : 5? ¿Y 400 : 20? Verificá tus respuestas con la calculadora.

12) a) ¿Se puede resolver 525 : 5 haciendo primero 500 : 5, luego 25 : 5 y finalmente sumando los dos resultados?
b) Y si la cuenta fuera 624 : 6, ¿cómo se podría hacer?

En el problema 11 podrían utilizarse ideas como "5 es la mitad de 10, entonces 400 : 5 da la mitad de 400 : 10". El maestro podría proponer otros cálculos para reutilizar estos razonamientos.
El problema 12 apunta a que los alumnos utilicen una descomposición aditiva del dividendo, de modo de convertir una división "difícil" en cuentas que se pueden resolver mentalmente, utilizando nuevamente lo estudiado en situaciones anteriores.

A continuación, se presentan problemas en los cuales se requiere estimar resultados de divisiones:

Problemas 13, 14 y 15

13) Marcá en el cuadro el resultado aproximado y luego verificá con la calculadora.

¿Cuánto da más o menos?	Cerca de 100	Cerca de 200	Cerca de 300
356 : 3			
1.524 : 5			
399 : 4			

14) Completá el cuadro, indicando con una cruz cuáles van a ser, aproximadamente, los resultados de estas divisiones. Verificá tus respuestas con la calculadora.

División	Resultado aproximado									
	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1.000
3.063 : 3										
1.696 : 8										
2.055 : 5										

2.412 : 4										
4.980 : 6										

15) **Para hacer entre todos:**
¿Cómo hicieron para completar el cuadro del problema 14? Escriban una lista con diferentes maneras de encontrar el resultado aproximado de una división.

Para estimar los resultados de estas divisiones no es necesario ni conveniente en todos los casos que utilicen el nudo más cercano; por ejemplo, para 356 : 3 alcanza con pensar en 300 : 3; para 1524 : 5, alcanza con pensar en 1500 : 5; en cambio, para 1696 : 8 conviene más pensar en 1600 : 8 que en 1700 : 8, aún si 1700 es más cercano a 1696 que 1700; etc. La descomposición aditiva de los números en juego será una herramienta útil para resolver estas situaciones. Puede retomarse lo analizado en el problema 12. También podrían utilizarse los resultados de la multiplicaciones que están en la tabla pitagórica; por ejemplo, para estimar 4.980 : 6 podría pensarse en 4.800 : 6, o bien establecer que "como 6 x 8 = 48, entonces 4800 es 6 x 800, está cerca de 800".
El problema 15 apunta a sintetizar estrategias que han sido utilizadas, de modo de tener un registro de todas ellas y posibilitar su reutilización en otros problemas.

4° parte: Problemas para estudiar la cuenta de multiplicar

Se presenta una serie de problemas que proponen el análisis y la comparación de diversas maneras de resolver cuentas de multiplicar:

Problemas 1, 2 y 3

1) Estas son las formas que utilizaron algunos chicos para resolver la cuenta 12 x 8:

Mariana	Raúl	José
12 x 8 10 x 8 = 80 2 x 8 = 16 80 + 16 = 96	12 x 8 ----------- 1 6 + 8 0 ---------- 9 6	1 1 2 x 8 ----------- 9 6

Reunite con un compañero y entre los dos respondan:

a) ¿Cómo pueden explicar la manera de resolver de Mariana?
b) ¿Dónde aparece el 16 de las cuentas de Mariana y Raúl en el cálculo de José?

2) Resolvé las siguientes multiplicaciones de dos formas diferentes. Podés usar las del problema anterior, o alguna diferente. Antes de empezar, anticipá cuánto te va a dar más o menos.

14 x 7 =		64 x 5 =		123 x 7 =

Probablemente los alumnos ya tengan cierta experiencia con el algoritmo convencional de la multiplicación (que es el que se muestra en el procedimiento de José). Se trata aquí de analizar otras escrituras posibles del mismo procedimiento, escrituras que muestran de modo más explícito los cálculos intermedios que se han realizado.

Los tres procedimientos que se muestran son equivalentes y se basan en las mismas propiedades:

- descomposición aditiva del primer factor: 12 = 10 + 2
- propiedad distributiva de la multiplicación en la suma: 12 x 8 = (10 + 2) x 8 = 10 x 8 + 2 x 8

De este modo, son maneras diferentes de escribir los cálculos que se van realizando hasta llegar al resultado final.

El trabajo previo realizado sobre multiplicaciones por números terminados en cero y de descomposición aditiva de uno de los factores facilitarán la comprensión de las estrategias de descomposición aditiva que se proponen en estos modos de resolver.

Es necesario que los alumnos tengan un tiempo para tratar de comprender estos procedimientos sin ayuda del maestro. En una puesta en común posterior el docente orientará el análisis hacia las cuestiones más relevantes. Por ejemplo, será interesante reflexionar sobre cuestiones como:

- ✓ *para multiplicar 12 x 8 se puede pensar al 12 como 10 + 2 y multiplicar cada parte del 12 por 8; después se suman los resultados.*
- ✓ *La segunda cuenta es la misma que la primera pero escrita de otra manera.*

Es interesante que los alumnos identifiquen que el 1 que se pone arriba en la cuenta de José proviene del 16 del resultado de 8 x 2.

La intención del problema 2 es la reutilización de las estrategias analizadas y la apropiación por parte de los alumnos de alguna que les resulte cómoda o confiable. Además, se propone la anticipación de los resultados antes de hacer el cálculo, con el objetivo de controlar a posteriori la coherencia entre ambos valores. El cartel informativo que se brinda a continuación propicia que esta práctica se instale de modo sistemático cuando se requiere la resolución de una cuenta:

Para tener en cuenta *Anticipar cuánto da más o menos una cuenta antes de resolverla permite controlar mejor los cálculos que se van haciendo para llegar al resultado. Además, da una idea de cuánto tendría que dar aproximadamente, para poder saber si se resolvió correctamente.*

Los problemas 3 y 4 profundiza el análisis de estrategias vinculadas a descomposiciones aditivas de uno de los factores:

Problemas 3 y 4

3) Para resolver una cuenta de multiplicar, Matías pensó así:

$$\left.\begin{array}{r}200 \times 4 = 800\\ 2 \times 4 = 8\end{array}\right. \longrightarrow \text{entonces: } 800 + 8 = 808$$

¿Cuál de estas cuentas estaba resolviendo Matías? ¿Cómo hiciste para saber?

22 x 4   220 x 4   202 x 4   2.002 x 4

4) Si sabemos que 35 x 8 = 280, marcá cuáles de los siguientes cálculos también van a dar ese resultado. ¿Cómo te das cuenta?

30 x 8 + 5 x 8	10 x 8 + 10 x 8 + 10 x 8 + 5 x 8
30 x 8 + 50 x 8	20 x 8 + 10 x 8 + 5 x 8

Será interesante que los alumnos puedan identificar cuál es el cálculo correcto sin necesidad de resolverlos. La calculadora podría utilizarse para verificar las anticipaciones. Por ejemplo, en el problema 3 podrían descartarse algunas cuentas: "220 x 4 no puede ser porque el resultado tiene que terminar en cero"; o bien, 22 x 4 no puede ser porque el razonamiento empieza con 200 x 4, entonces tiene que ser más grande"; "no puede ser 2.002 x 4 porque tendría que dar cerca de 8.000, no de 800"; etc.
Para resolver el problema 4 el maestro podría propiciar la escritura de estrategias que involucren descomposiciones aditivas como las analizadas en los primeros problemas de esta sección.

En los problemas que siguen, se retoman las estrategias analizadas, pero ahora con números de mayor cantidad de cifras. Algunos se proponen para ser resueltos en parejas:

Problemas 5, 6, 7 y 8

Los problemas 5, 6 y 7 son para hacer de a dos:

5) Para resolver 15 x 12, unos chicos estimaron cuánto tendría que darles más o menos:

"Tiene que dar más de 150 porque 15 x 10 = 150 y si hacemos 15 x 12 es un poco más"
"Tiene que tener 4 cifras porque 15 tiene dos cifras y 12 tiene otras dos"
"Tiene que dar menos de 300 porque 15 x 20 = 300 y si hacemos 15 x 12 es un poco menos"

Discutan si están de acuerdo con estas ideas.

6) ¿Cómo se podría estimar el resultado de 15 x 22? ¿Y de 12 x 31?

7) Para resolver la cuenta 15 x 12, estos chicos pensaron así:

Juana	Valeria	Pablo	Jorge	Mirta
10 x 15 = 150 2 x 15 = 30 150 + 30 = 180	10 x 12 = 120 5 x 12 = 60 120 + 60 = 180	15 x 2 x 6 = 30 x 6 = 180	1 15 x 12 --------------- 3 0 + 1 5 - ---------------- 1 8 0	15 x 12 --------------- 3 0 + 1 5 0 ---------------- 1 8 0

- ¿Qué cálculo hizo Mirta para que le diera 30? ¿Y para que le diera 150?
- Resuelvan las siguientes cuentas de dos maneras diferentes: 21 x 18 y 45 x 24. Pueden usar las que aparecen en el cuadro, o alguna otra que conozcan.

5) Resolvé la cuenta 36 x 25 de dos maneras diferentes. Podés usar las del problema anterior o alguna otra que conozcas. Anticipá cuánto te va a dar más o menos antes de resolverla.

La intención de esta actividad es estudiar la posibilidad de reutilizar estrategias conocidas (tanto de estimación como de cálculo), aun si los números son más grandes.

Podría ser interesante analizar la posibilidad de descomponer (ya sea aditiva o multiplicativamente) el 15 en lugar del 12 para realizar estos cálculos, y estudiar los cambios que esta elección generan en los productos parciales, aunque el resultado final al que se arriba es el mismo. Así, el maestro podría proponer:
"¿Sirve este razonamiento para resolver la cuenta 12 x 15?
10 x 12 = 120
5 x 12 = 60
120 + 60 = 180
¿Qué tiene de diferente con los que analizaron en el problema 4?"

5° parte: Problemas para resolver con distintos cálculos

En esta sección se propondrá una variedad de problemas que podrían resolverse utilizando la división, aunque no se espera que sea ésta la única estrategia que utilicen los niños.

Los problemas de reparto y partición[1] son los que aparecen en primer lugar para ser resueltos, analizados y comparados:

Problemas 1, 2, 3 y 4

1) Cuatro amigas tenían que repartir 32 galletitas entre ellas y averiguar cuántas les corresponde a cada una. Todas tenían que tener la misma cantidad y no tenía que sobrar ninguna. ¿Cómo harías el reparto?

[1] Se llama problema de reparto a aquél en el que se pregunta por la cantidad que corresponde a cada parte (por ejemplo, el problema 1 de esta sección). En tanto que problema de partición es el que indaga acerca de la cantidad de partes en que se realiza un reparto determinado (por ejemplo, el problema 2 de esta sección). Si bien ambos tipos de problema puede resolverse a través de una división, en cada uno cada parte de esta cuenta tiene un significado diferente y en esta diferencia radica la mayor o menor dificultad que tienen los alumnos en identificar a uno y otro como "problema de dividir".

2) Si se quieren repartir 32 galletitas en partes iguales y le toca 4 galletitas a cada persona, ¿entre cuántas personas se hizo el reparto?

3) **Para discutir entre todos:** ¿En qué se parecen y en qué se diferencian los problemas 1 y 2?

4) a) Un frasco trae 90 caramelos. Se reparten 9 a cada chico en un cumpleaños. ¿Cuántos chicos había?
b) ¿Cuál o cuáles de estos cálculos sirven para resolver el problema?

10 x 9 = 90	90 : 9 = 10	9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 90
9 x 10 = 90	90 : 10 = 9	10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 90

En esta primera instancia podrían aparecer diversos procedimientos de reparto, algunos basados en representaciones gráficas, o bien en restas sucesivas (por ejemplo, en el problema 1 los alumnos podrían ir descontando de a 4: 32 – 4 = 28; 28 – 4 = 24; 24 – 4 = 20; etc., hasta que no les quede nada; la respuesta será 8, es decir, la cantidad de veces que se descontó 4 del 32). También, algunos alumnos podrían sumar 4 sucesivamente hasta llegar a 32, y establecer la cantidad de veces que han sumado 4. Otros alumnos pueden reconocer que se trata de un "problema de división", y utilicen la cuenta para resolver. El objetivo es que circulen diversas estrategias de resolución.

Si bien los problemas 1 y 2 se pueden resolver utilizando la cuenta 32 : 4, o estrategias como descontar de a 4 o sumar de a 4, la pregunta que se hace es diferente y el significado de cada parte de la cuenta no es el mismo. Esta discusión es la que se persigue en el problema 3.

El problema 4 apunta a que los alumnos puedan identificar diferentes cálculos que resuelven un mismo problema. Se retoman aquí estrategias que podrían haber aparecido en la resolución de los anteriores, y se agregan otras para enriquecer el análisis. El maestro podría proponer cuestiones como: *"¿En qué parte de los cálculos aparece el resultado del problema?"*, que apuntan a que los niños comiencen a pensar en la división como herramienta útil para resolver este tipo de problemas, ya que el resultado del cálculo es directamente la respuesta.

Se presentan a continuación problemas de organizaciones rectangulares:

Problemas 5 y 6

5) Juan tiene que plantar 45 pinos en 5 hileras. ¿Cuántos pinos plantará en cada hilera?

6) En una panadería se preparan 140 facturas por día. Se hornean en bandejas con 8 facturas cada una. ¿Cuántas bandejas se necesitan en total para preparar todas las facturas?

Los alumnos seguramente ya han resuelto problemas similares a estos a propósito del estudio de la multiplicación. Sin embargo, dado que la pregunta ahora no se encuentra en el número total sino en la cantidad de filas o en el número de elementos por fila, el problema puede resolverse por medio de una división. Nuevamente es probable que aparezca una diversidad de estrategias. El maestro podrá propiciar la comparación de las estrategias que han aparecido y preguntar por otras. Por ejemplo: *"¿Es cierto que se pueden resolver usando multiplicaciones? ¿Y usando divisiones? ¿Cómo sería la cuenta en cada caso?"*.

Los problemas 7 a 11 proponen el análisis de situaciones en las que existe un resto al realizar un reparto:

Problemas 7, 8, 9, 10 y 11

7) Para el día del niño se repartieron bolitas entre 4 hermanos. Todos recibieron la misma cantidad. Había 29 bolitas. ¿Cuántas le corresponde a cada uno? ¿Sobraron bolitas?

8) Luego repartieron 29 chocolates para los mismos 4 chicos. ¿Cuántos chocolates le dieron a cada uno? ¿Sobraron chocolates?

9) **Para discutir entre todos:** ¿Qué opinan de lo que dicen estos chicos sobre los problemas anteriores?

“Para mí los dos problemas te dan igual porque tienen los mismos números”
“A mí me parece que dan distinto porque el chocolate se puede partir y podés repartir un pedacito de chocolate”

10) Un vendedor coloca libros en estantes y quiere que en todos haya la misma cantidad. Tiene 82 libros para 8 estantes. ¿Cuántos podrá poner en cada uno? ¿Le sobran? ¿Cuántos le faltarían para llenar otro estante?

11) Hay que trasladar 53 chicos en camionetas. Si en cada una solamente pueden viajar 5, ¿cuántas camionetas hay que contratar?

La diferencia entre los problemas 7 y 8 se expone para la discusión en el problema 9: si bien se pueden resolver utilizando la mismas estrategias, por ejemplo, una división, en un caso lo que sobra podrá seguir repartiéndose y en el otro, no.

Los valores elegidos en estos problemas son sencillos, dado que el foco no estará puesto en el cálculo. La respuesta depende del tipo de objeto que se esté repartiendo y se hace necesario este análisis para construirla. Por ejemplo, se puede responder el problema 7 diciendo: “le corresponden 7 bolitas a cada uno, y sobra una bolita”, mientras que el problema 8 se podría responder de distintos modos: “le corresponde 7 chocolates a cada uno y un pedacito más”; “7 chocolates y el que sobra se corta en cuatro pedacitos y se le da uno a cada uno”; “7 chocolates y un cuarto a cada uno”; etc.

Los problemas 10 y 11 permiten seguir discutiendo acerca del cambio que produce la presencia de un resto en la respuesta a la situación. En el problema 10, la respuesta a la primera pregunta es “10 libros en cada estante, y sobran 2”. En cambio, en el segundo problema, no es el cociente de la división el que establece la respuesta, sino el análisis de la situación la que permite generarla: dado que al repartir los niños en camionetas de a 5, sobrarán 3, éstos harán necesario el agregado de una camioneta extra para poder trasladarlos. Por lo tanto, la respuesta no es “10 camionetas y sobran 3” sino “11 camionetas”.

El cartel “Para tener en cuenta” sintetiza las cuestiones que se han discutido a propósito de la resolución de los problemas anteriores:

***Para tener en cuenta**: En los problemas de repartir, a veces sobra y otras veces no. También a veces lo que sobra puede seguir repartiéndose y otras veces no se puede Por ejemplo, si sobran chocolates o alfajores se puede, pero si lo que sobra son bolitas o libros, no.*
En algunos casos lo que sobra parecería que cambia la respuesta. Por ejemplo, en el problema de las camionetas hay que agregar una camioneta más para poder llevar a todos los chicos.

Los problemas 12 y 13 ponen en juego otro de los sentidos de la división: son problemas que involucran determinar “cuantas veces entra un número en otro”, también llamados problemas de iteración o problemas que involucran una partición sin tratarse de repartos.

Problemas 12 y 13

12) Un chico ahorró $68. Va a gastar $6 por semana. ¿Para cuántas semanas le alcanza? ¿Le sobra dinero?

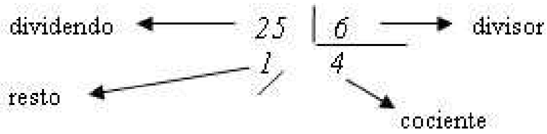
13) Mariela tiene un cuaderno de dibujo con 75 páginas. Piensa hacer 3 dibujos por día, ocupando una página distinta para cada dibujo. ¿Para cuántos días le alcanza el cuaderno?

Dado que no se trata de problemas de reparto, la división no parece la estrategia más “natural” para resolver este tipo de problema. Sin embargo, el hecho de que para resolverlos aparezcan estrategias similares a las que se han analizado en situaciones anteriores (restas o sumas sucesivas, por ejemplo), hace posible que en una puesta en común el maestro proponga el análisis de la división como otra de las posibles maneras de resolver. Esta clase de problemas suele ser bastante más complejo para los niños que los anteriores, y precisarán ser tratados en siguientes años hasta familiarizarse con ellos y reconocer la división como recurso de solución.

6° parte: Problemas para usar y analizar la cuenta de dividir

Se presenta inicialmente un cartel en el que se brinda información sobre el nombre de las partes de la cuenta de dividir:

***Para tener en cuenta**: En una cuenta de división cada parte tiene un nombre:*

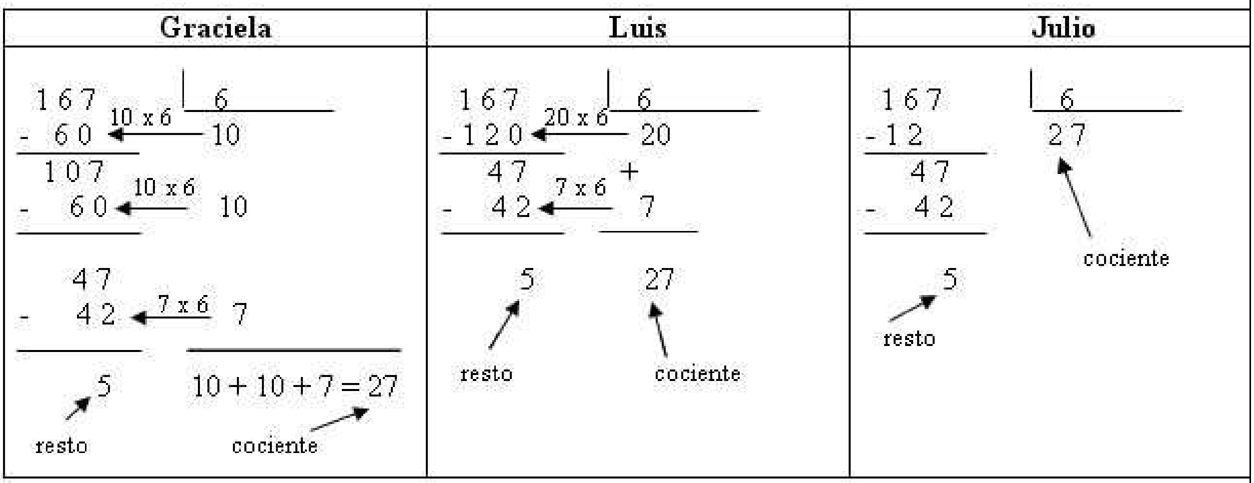


Este cartel podrá ser consultado siempre que sea necesario.

Los problemas 1 y 2 apuntan a analizar algunas estrategias válidas para la resolución de divisiones:

Problemas 1 y 2

1) **Para hacer de a dos:** Para resolver la cuenta 167 : 6, unos chicos hicieron así:



a) Intenten explicar cómo hizo cada uno ese cálculo.
b) Busquen en la cuenta de Luis los dos números 60 y los dos números 10 de la cuenta de Graciela.
c) Busquen en la cuenta de Julio el 120 y el 20 de la cuenta de Luis.

2) Resolvé las siguientes divisiones de dos maneras diferentes:

667 : 5   328 : 7

Podés usar las formas que inventaron los chicos del problema 1, o alguna otra que conozcas.

En el problema 1 se proponen tres modos diferentes de resolver y escribir la misma cuenta, con el objetivo de que los niños puedan analizar los cálculos que permanecen ocultos en el algoritmo convencional, y apropiarse de la estrategia que le resulte más accesible a cada uno.

En propuestas como ésta se reinvierten cuestiones analizadas en secciones anteriores: multiplicaciones por números terminados en cero; relación entre multiplicación y división; etc. Si bien el algoritmo convencional no está presente para ser analizado, el último procedimiento es similar, pero haciendo explícitas las restas parciales en la columna del resto (restas que de otro modo se harían “en la cabeza”). El maestro podría agregar el algoritmo convencional para compararlo con los que están escritos; sin embargo, no es necesario que los alumnos lo utilicen. Por el contrario se apunta a que estos diferentes modos de resolución convivan en el aula, de manera que los niños tengan la oportunidad de elegir aquel que les permita un mejor control del proceso que están llevando a cabo, y por lo tanto comprender mejor el funcionamiento de la cuenta. En el problema 2 se fuerza a los alumnos a utilizar dos estrategias y reutilizar lo analizado en el problema 1.

Las propuestas que siguen tienen como objetivo que los niños se apropien de ciertas estrategias de anticipación y control de los resultados. Se apunta a que aprendan a estimar la cantidad de cifras que puede tener el cociente, y también de qué número estará cerca dicho cociente. El trabajo se centrará, por lo tanto, en que realicen estimaciones antes de la resolución efectiva de la cuenta. Se retoman de este modo prácticas que se han venido analizando en secciones anteriores:

Problemas 3, 4 y 5

3) **Para hacer de a dos:** Para saber cuántas cifras tiene el cociente de 1.620 : 60, María pensó así:

“60 x 10 = 600
60 x 100 = 6.000
El cociente tiene que ser menor que 100 porque con 100 me paso. Así que tiene que ser un número de dos cifras”

a) Discutan si lo que dice esta chica es cierto o no. Verifiquen con la calculadora.
b) ¿Cómo podrían decidir de cuántas cifras es el cociente de 2.872 : 40?

4) Sin resolver las cuentas, decí cuántas cifras tendrá el resultado en cada caso. Si te sirve, utilizá el razonamiento del problema anterior. Verificá tus respuestas con la calculadora.

2.484 : 6 7.450 : 25 65.124 : 54

5) ¿Será cierto que el cociente de 9.877 : 14 tiene 4 cifras? Respondé sin resolver la cuenta.

Las estrategias de estimación se vinculan con la multiplicación por la unidad seguida de ceros. Este tipo de actividad tiene como objetivo que los alumnos aprendan a controlar los cálculos que resuelven, a partir de anticipar lo que podría ser un resultado posible del que no.

El foco del problema 3 está en las razones por las que es correcto el razonamiento, y por lo tanto no se pretende que los alumnos resuelvan el cálculo “a mano” para verificar. En este sentido, el uso de la calculadora permite “descargar” el problema.

Un cartel “Para tener en cuenta” se presenta después del problema 3, para explicitar el objetivo de estas propuestas:

Para tener en cuenta *Anticipar cuántas cifras tiene el cociente de una cuenta de dividir antes de resolverla permite controlar mejor los cálculos que se van haciendo para llegar al resultado. Además, da una idea de cuánto tendría que dar aproximadamente, para poder saber si se resolvió correctamente.*

Los problemas siguientes apuntan a establecer no sólo la cantidad de cifras del cociente sino un valor cercano a él. Se retoman algunas de las cuestiones abordadas al final de la sección anterior:

Problemas 6, 7 y 8

6) Antes de resolver la cuenta 457 : 5, Malena pensó así:

457 |_5____
__ __
↓
va a tener dos cifras

10 x 5 = 50 estoy lejos de 457
100 x 5 = 500 me pasé de 457

Entonces va a ser un número entre 10 y 100, pero va a estar más cerca del 100.

a) ¿Estás de acuerdo con lo que dice Malena? Verificá con la calculadora.

b) ¿Entre qué números estará el cociente de las siguientes divisiones?

525 : 3 5.635 : 7 5.448 : 24

7) a) **Para hacer de a dos**: Piensen si lo que dice Jorge es cierto:

El cociente de 364 : 4 está entre 10 y 100, pero más cerca de 100, así que podría ser "noventa y ..." u "ochenta y ....".

b) Estimen cerca de qué número estará el cociente de las siguientes divisiones:

450 : 30 946 : 11 1236 : 12

8) Sin resolver la cuenta, marcá con una cruz cerca de qué número estará el cociente de las siguientes divisiones. Explicá cómo lo elegiste.

Cuenta	El cociente está cerca de:		
536 : 4	90	10	100
259 : 7	10	20	30
3540 : 15	100	200	300
592 : 8	90	80	70
208 : 4	20	60	100

El problema 6 extiende el encuadramiento del cociente por potencias de diez agregando una estimación sobre la proximidad a una u otra de dichas potencias. En las cuentas que se proponen los valores del dividendo y del divisor permiten hacer bien evidente esta cuestión (es decir, se han evitado en un principio los valores cuyo cociente sea cercano a 50, 500, etc).

El problema 7 privilegia algunos cocientes posibles por sobre otros, utilizando el tipo de aproximación que se ha analizado en el problema anterior. El objetivo en este caso es explicitar que aún si no podemos afirmar con certeza cuál es el cociente, sí podemos establecer cerca de qué número puede estar y cerca de qué números no está. Por ejemplo, en el caso del razonamiento de Jorge, se puede afirmar que seguro no va a estar cerca de números cercanos a 10, es decir, 10, 20, 30...

El problema 8 apunta no sólo a que los niños puedan estimar, sino también identificar exactamente a qué número se acerca más. Esta actividad retoma lo analizado en algunos problemas de la sección anterior. Por ejemplo, para 536 : 4, podrían aparecer razonamientos como:

4 x 10 = 40 estoy lejos del 536. Entonces no es 10.
4 x 100 = 400 estoy más cerca, pero tiene que ser un poco más grande de 100. Entonces no puede ser 90.
4 x 200 = 800 me pasé. Entonces es de los cienes

Para 259 : 7, podrían pensar:

7 x 10 = 70
7 x 20 = 140
7 x 30 = 210 estoy cerca
7 x 40 = 280 me pasé. Entonces es de los treintas.

Los problemas 9 y 10 apuntan a analizar diferentes modos de resolver una cuenta de dividir con divisor de dos cifras, anticipando inicialmente lo que puede ser un resultado posible de los que no:

Problemas 9 y 10

9) Para resolver la cuenta 268 : 12, unos chicos primero estimaron cerca de qué número estaría el cociente. Pensaron así:
"El cociente tiene dos cifras porque 12 x 10 = 120, y todavía estoy lejos de 258, pero 12 x 100 = 1.200, ya me pasé. Tiene que ser menor que 100"

"Tiene que estar más cerca de 10 que de 100"
"El cociente tiene que ser cercano a 20 porque 12 x 20 = 240"

Reunite con un compañero y juntos respondan:

a) ¿Es correcto lo que dicen?
b) Para resolver la cuenta, hicieron así:

Graciela	Luis	Julio
268 | 12 -120 ← 12 x 10 — 10 148 -120 ← 12 x 10 — 10 28 - 24 ← 12 x 2 — 2 4 — $10 + 10 + 2 = 22$ resto — cociente	268 | 12 -240 ← 12 x 20 — 20 28 — + - 24 ← 12 x 2 — 2 4 — 22 resto — cociente	268 | 12 -24 — 22 28 - 24 4 — cociente resto

Intenten explicar cómo hizo cada uno ese cálculo.
c) Busquen en la cuenta de Luis los dos números 120 y los dos números 10 de la cuenta de Graciela.
d) Busquen en la cuenta de Julio el 240 y el 20 de la cuenta de Luis.

10) Estimá el cociente de estas divisiones y luego resolvelas como quieras.

350 : 16 4.344 : 22

El problema 9 retoma las prácticas de estimación de cantidad de cifras y de aproximación del valor del cociente que se han venido llevando a cabo hasta el momento. En la parte b) se proponen tres modos diferentes de resolver la misma cuenta. Es una actividad similar a la que se propone en el problema 1, pero ahora con divisores de dos cifras. Dado que el tipo de razonamiento involucrado es el mismo, no se hace necesario establecer una secuenciación que se base en la clasificación "cuentas de dividir por una cifra" y "cuentas de dividir pordos cifras".

7° parte: Repasar y estudiar operaciones

En esta parte se apunta a que los niños puedan revisar los conocimientos que han circulado durante las clases en las que se han resuelto problemas de multiplicación y división. En una primera actividad, cada uno deberá identificar aquellos problemas que les han resultado "difíciles", y se dedicará un tiempo para que vuelvan a resolverlos. Para ello, será interesante revisar algunas de las conclusiones elaboradas, y establecer cuáles de ellas pueden ser útiles. Podrían releerse también los carteles "Para tener en cuenta" que han aparecido a lo largo del material.

En segundo término, se propone una colección de problemas para reutilizar algunas de las estrategias estudiadas. Es una buena oportunidad para que vuelvan a circular procedimientos y relaciones ya estudiados, de modo que mayor cantidad de niños puedan utilizarlos, analizarlos e incorporarlos como propios. También en este caso volver a leer los carteles "Para tener en cuenta" puede ser de utilidad.

Este espacio de repaso y estudio permite al docente identificar la existencia de aspectos que será necesario retomar, errores que persisten, nuevas relaciones que han sido incorporadas por la mayor parte de la clase, etc.

Actividades 1 y 2

1) Hasta aquí estudiaste cálculos y problemas de multiplicación y división. Volvé a mirar todo lo que hiciste

y marcá los problemas que te resultaron más difíciles. Luego, intentá hacerlos de nuevo.

2) Resolvé estos ejercicios que te van a servir para repasar lo que estudiaste:

a) Resolvé estos cálculos mentalmente. Luego, verificá los resultados con la calculadora.

6 x 10 =	6 x 100 =	6 x 20 =	6 x 200 =
6 x 30 =	6 x 300 =	6 x 40 =	6 x 400 =

b) Usando que 6 x 50 = 300, calculá:

6 x 500 = 60 x 5 = 60 x 50 = 600 x 5 = 12 x 5 =

Después, controlá los resultados con la calculadora.

c) Proponé dos formas distintas de resolver estos cálculos:

15 x 8 40 x 7 71 x 9

d) Anotá el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

21 : 5 58 : 9 263 : 10 263 : 100

e) Resolvé mentalmente. Luego, verificá los resultados con la calculadora:

3.200 : 10 =	3.200 : 100 =
3.200 : 20 =	3.200 : 200 =
3.200 : 40 =	3.200 : 400 =

f) En una panadería hicieron 1.120 medialunas. Las acomodaron en bandejas de 12 medialunas cada una. ¿Cuántas bandejas completaron? ¿Quedaron medialunas sin acomodar?

g) En una excursión en lancha, las embarcaciones salen completas con 24 pasajeros. Si durante un fin de semana está previsto transportar a un grupo de 856 turistas, ¿cuántos viajes en lancha se harán? ¿Cuántas personas más tendrían que haber viajado para que la última lancha saliera completa?

h) Mariela tiene $344 en el cajero. Si saca $20 por día, ¿para cuántos días le alcanza?

i) Marcá con una cruz cuánto pensás que va a dar aproximadamente cada una de estas divisiones. Verificá tus respuestas con la calculadora:

División	**Resultado aproximado**									
	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1.000
4.064 : 4										
2.696 : 5										
1.855 : 8										

j) Resolvé estas cuentas como quieras. Antes de empezar, decí más o menos cuánto te va a dar:

28 x 24 68 x 31 452 x 47

k) Resolvé estas cuentas como quieras. Antes de empezar, anticipá cuántas cifras tendrá el cociente:

820 : 18 956 : 56 8.435 : 31

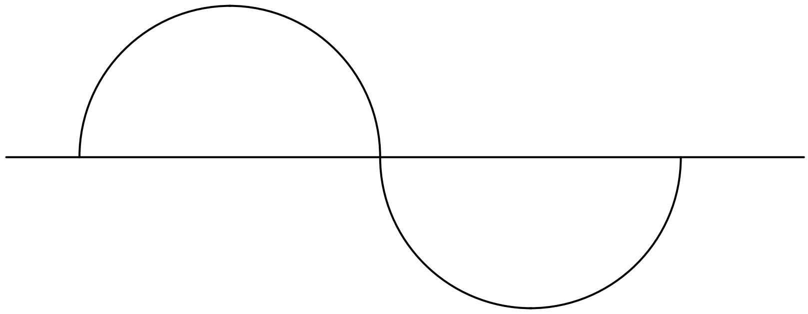
8° parte: Problemas con círculos y circunferencias

Se propone el trabajo con instrumentos geométricos con el objetivo de propiciar el estudio de ciertas propiedades del círculo y la circunferencia, las cuales se ponen en evidencia cuando se quiere realizar una construcción. Dado que muchos alumnos no tienen experiencia previa en el uso del compás, el maestro podría proponer inicialmente el trazado libre de figuras circulares, de modo que se familiaricen con este instrumento.

Los primeros problemas plantean el copiado de figuras, habilitando el uso de la regla y el compás:

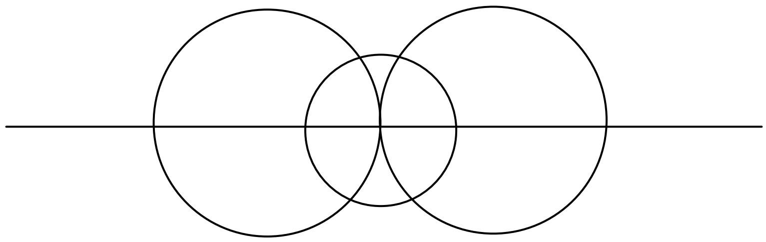
Problemas 1, 2 y 3

1) Copiá esta figura en una hoja lisa. Superponé la copia que hiciste con el original para ver si ambas coinciden.



2) Discutan entre todos:
   a) ¿Cómo empezaron a copiarla? ¿En qué se fijaron?
   b) ¿Dónde tuvieron que pinchar el compás? ¿Cuántas veces?
   c) ¿Cómo supieron cuánto tenían que abrirlo?

3) Ahora copiá esta otra figura. Tratá de anticipar por dónde vas a empezar a copiarla, cuántas veces vas a pinchar el compás y qué tenés que hacer para saber cuánto abrirlo.



Al proponer la reproducción en hoja lisa se trata de que los alumnos no tengan puntos de referencia que les den pistas acerca de dónde “pinchar” el compás, cuánto abrirlo, etc. En el problema 1 los niños deberán establecer la necesidad de utilizar la regla para saber cuánto abrir el compás. Probablemente muchos “pinchen” en el punto de unión de ambas figuras y abran el compás tanto como la longitud del diámetro. Será interesante explicitar esta estrategia en el momento de la discusión que propone el problema 2, de modo de desecharla.
En un principio los niños probablemente no utilicen un lenguaje formal para describir lo que han hecho; sin embargo no es el objetivo de estos primeros problemas adquirir o utilizar dicho lenguaje. El maestro podría ofrecer cierta información acerca de algunos nombres (circunferencia, centro) con el fin de convenir un lenguaje en común a medida que se va desarrollando la discusión, y decidirá el momento que le parezca oportuno para informar el vocabulario específico.
Podrían aparecer reflexiones como:

- Podés empezar a dibujar por la parte de arriba o por la parte de abajo
- Tenés que pinchar dos veces
- Para saber dónde pinchar usás la regla y medís la mitad de la línea adentro de la figura
- Medís una sola vez porque las dos partes son iguales, una para arriba y otra para abajo
- Etc.

En el problema 3 será interesante el trabajo de anticipación, en base a lo que se ha discutido en los problemas anteriores. Al momento de la copia le seguirá una instancia de reflexión en la que se podrían comparar anticipaciones con resultados efectivos.

Los problemas 4 y 5 ponen en juego la idea de circunferencia como conjunto de puntos que equidistan de un centro, y de círculo como conjunto de puntos “interiores” a la circunferencia:

Problemas 4 y 5

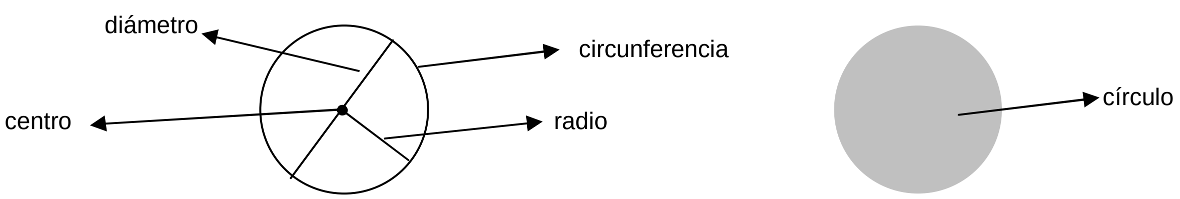
4) a) Marcá todos los puntos que se encuentren exactamente a 2 cm de la cruz marcada con una A. ¿Cuántos podés encontrar?
   b) Comparen entre todos lo que hicieron. ¿Todos marcaron los mismos puntos? ¿Cuántos encontraron? ¿Cómo pueden estar seguros de que no hay otros?

5) Marcá todos los puntos que puedas encontrar que estén a menos de 3 cm de la cruz marcada con una B.

Para resolver el problema 4, los niños suelen medir con la regla y marcar puntos aislados a 2 cm o menos del punto requerido. Será interesante instalar una discusión en torno a si esos son los únicos puntos o si se pueden encontrar más. Progresivamente, los niños irán identificando que el agregado de mayor cantidad de segmentos de 2 cm desde A va “dando la vuelta” y por lo tanto podrían comenzar a utilizar el compás de modo de marcar más puntos (todos).
Para el problema 5, el tipo de producción podría ser similar pero con segmentos de menor longitud que 3 cm; algunos niños también podrían trazar circunferencias concéntricas por B, de diámetro menor a 3 cm, en base a la discusión que se ha favorecido en el problema anterior. Sin embargo, la discusión que intenta propiciarse aquí es bastante más compleja que en el caso anterior, dado que considerar el círculo como conjunto de puntos implica pasar de tratar con líneas (ya sean segmentos o circunferencias) a trabajar con la idea de superficie. El maestro podría proponer para el análisis otros puntos interiores a la circunferencia de centro B y radio 2 cm, de modo de establecer si cumple o no las condiciones del problema. Progresivamente los niños puedan considerar que todos los puntos interiores a la circunferencia están a menor distancia que 2 cm.

Se presenta un cartel “Para tener en cuenta”, que sintetiza las cuestiones discutidas a propósito de estos problemas, y que dejan registro de los nombres formales de los elementos con los que se está trabajando:

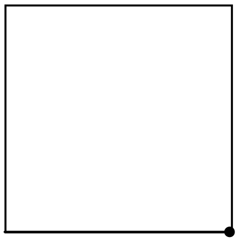
Para tener en cuenta*: Todos los puntos que están a la misma distancia de otro llamado centro forman una figura que se llama circunferencia. Si se toman en cuenta todos los puntos de la circunferencia y además todos los que están dentro de ella, se tiene un círculo.*
A cualquier segmento que une el centro y un punto sobre la circunferencia se lo llama radio.
A cualquier segmento que une dos puntos sobre la circunferencia y que pasa por el centro se lo llama diámetro. El diámetro mide el doble que el radio.



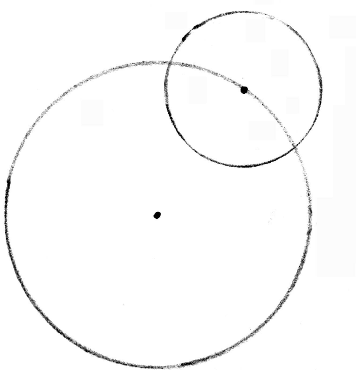
Los problemas que siguen buscan reinvertir lo analizado en la resolución de otras situaciones:

Problemas 6 y 7

6) En el cuadrado de la figura pintá de rojo todos los puntos a más de 4 cm del punto A, de verde los puntos a exactamente 4 cm del punto A, y de azul todos los puntos a menos de 4 cm del punto A.



7) Escribí un mensaje para que un compañero pueda dibujar una figura igual a ésta:



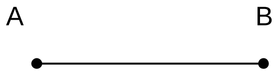
El problema 6 apunta al trazado de un arco de circunferencia con centro en A, y a marcar en el color correspondiente los puntos sobre la circunferencia y los puntos interiores o exteriores a ella, tomando en cuenta lo discutido en los problemas 4 y 5. Muchos niños producirán respuestas similares a las que habían producido antes (es decir, considerarán puntos aislados a 4 cm, más de 4 cm o menos de 4 cm). Será una buena oportunidad para volver sobre lo discutido. El maestro podría proponer nuevamente algunos puntos para analizar si se cumple o no la condición pedida en el enunciado. Por ejemplo, podría agregar un punto "por afuera" de la circunferencia, pero dentro del cuadrado, y preguntar: *"¿Puedo marcar este punto con color azul? ¿Por qué?"*.

El problema 7 tiene como propósito que los alumnos aprendan a utilizar cierto lenguaje específico en la producción de un mensaje claro y preciso, así como a identificar relaciones importantes que determinan a la figura analizada. Probablemente los niños produzcan mensajes incompletos (es decir, que den lugar a más de una construcción); por ejemplo, sin detallar la longitud del radio o del diámetro; sin decir que hay que pinchar sobre un punto de la circunferencia grande para trazar la pequeña; etc. O bien dando datos que no son importantes, como "pinchá sobre la circunferencia grande, arriba a la derecha". La discusión acerca de la cantidad de instrucciones que son necesarias para que la construcción se pueda llevar a cabo enriquecerá el análisis de este tipo de figura.

El problema 8 es un problema de construcción:

Problema 8

8) En este dibujo, los puntos A y B están a 3 cm de distancia. Marcá todos los puntos que estén, a la vez, a 2 cm de A y a 2 cm de B.



Reunite con un compañero y comparen sus respuestas. ¿Cuántos puntos encontraron?

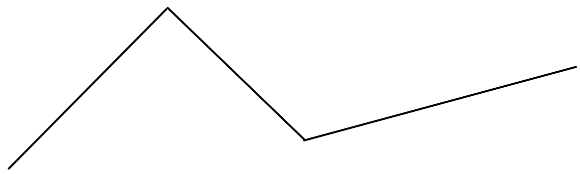
Los alumnos deberán trazar una circunferencia de 2 cm de radio con centro en A y otra con centro en B. Probablemente supongan que todos los puntos sobre dichas circunferencias están a 2 cm de los puntos dibujados en el enunciado. Será interesante proponer una discusión tomando algún punto de alguna de ellas que no cumpla con dicha condición, de modo de poner a los alumnos en situación de tener que explicar por qué en este caso ese punto, así como muchos otros, no están a 2 cm de A y de B a la vez, y que encuentren los únicos dos puntos que cumplen con dicha condición (a saber los puntos de intersección de ambas circunferencias). Este problema posibilitará un primer acercamiento al trazado de triángulos utilizando regla y compás, y será retomado en la sección siguiente.

9° parte: Problemas con ángulos y triángulos

El primer problema que se propone tiene como objetivo instalar entre los niños la necesidad de medir de algún modo la abertura entre dos segmentos, es decir, traer a la escena la idea de ángulo. Nuevamente, la solicitud del uso de hoja lisa tiene la intención de obstaculizar la posibilidad de que los niños tomen líneas de referencia para copiar la figura.

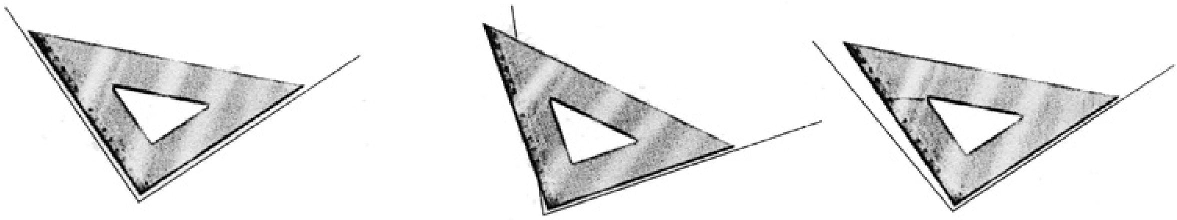
Problema 1

1) Copiá en una hoja lisa el siguiente dibujo.



Probablemente los primeros intentos serán "a ojo", solamente utilizando la regla para reproducir los segmentos del largo original. También muy probablemente las copias no coincidan con las figuras originales, y este será el disparador de la actividad: ¿Por qué no alcanza con medir los segmentos con la regla? ¿Cómo se puede copiar exactamente la abertura entre los segmentos? Esta discusión permite poner en primer plano una característica de las figuras relacionadas con la "inclinación" de las líneas. Con el objetivo de presentar este concepto se ofrece un cartel informativo:

***Para tener en cuenta**: Para copiar figuras como la del problema 1 se necesita tener en cuenta, además de la longitud de los segmentos, la inclinación entre unos y otros. A esa inclinación o abertura se la llama "ángulo".*
Algunos ángulos pueden dibujarse con la escuadra. Estos ángulos se llaman rectos.



Este ángulo es recto

Estos ángulos no son rectos

Los ángulos más grandes que un recto se llaman "obtusos". Los ángulos más chicos que un recto se llaman "agudos".

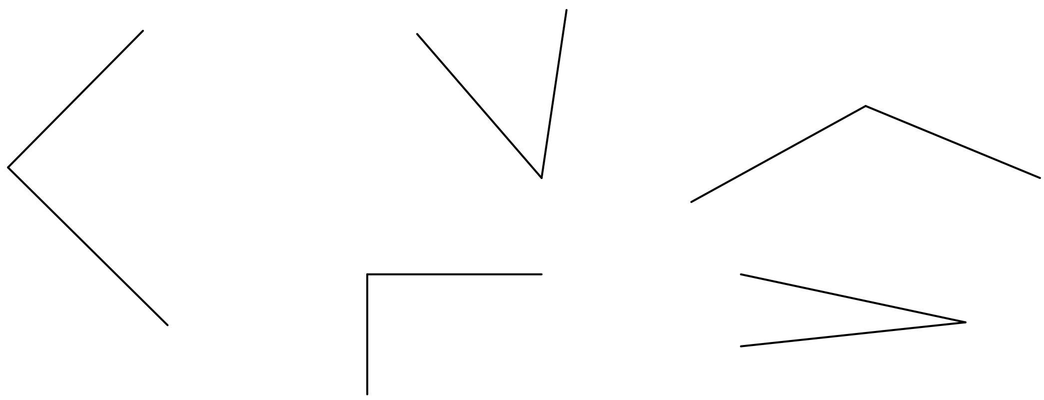
No se presenta aún el transportador como instrumento de medida, dado que en un primer momento se trabajará con la idea de ángulo recto como referencia. Estas discusiones intentan centrar la atención en cuestiones relevantes para definir el tamaño de un ángulo, y desechar aquellas que no lo son (como por ejemplo, el largo de los segmentos que los definen, la orientación de la figura respecto de la hoja, etc). Este tipo de análisis permitirá que, al utilizar el transportador para medir, los niños estén en condiciones de anticipar cuál puede ser una medida posible y cuál no.

Los problemas que siguen intentan poner el foco en estas cuestiones:

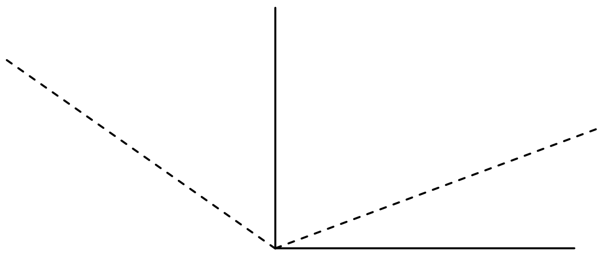
Problemas 2 y 3

2) Reunite con un compañero y dibujen ángulos rectos, ángulos menores y ángulos mayores que un recto. ¿Cómo hicieron?

3) ¿Cuáles de los siguientes ángulos son rectos? ¿Cuáles son agudos? ¿Cuáles son obtusos?

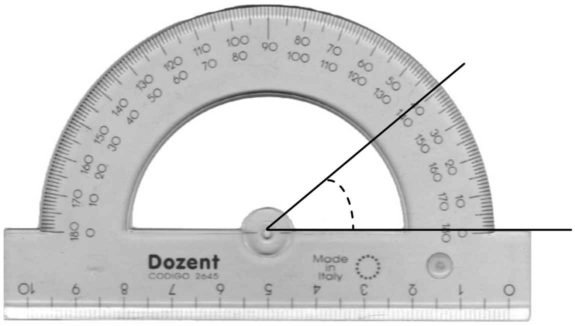


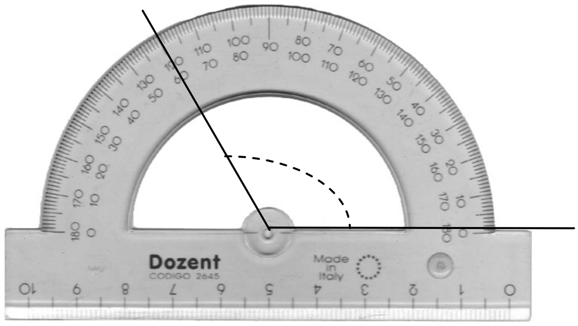
Para la resolución de estos problemas, el maestro habilitará el uso de la escuadra. En un principio los niños podrían dibujar ángulos rectos siguiendo los “bordes” de la escuadra, y luego trazar segmentos más “cerrados” o más “abiertos” respecto del dibujo original:



A continuación, un cartel informa acerca del transportador como instrumento adecuado para la medición de ángulos:

***Para tener en cuenta**: Para medir ángulos se usa un instrumento llamado transportador. La escala indica la medida del ángulo expresada en “grados”. En el primer dibujo se ve un ángulo de 40°, en el segundo, un ángulo de 120°*





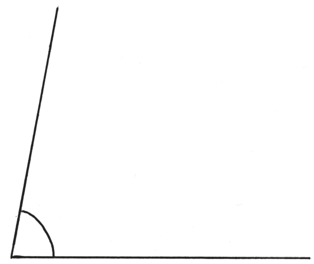
Los problemas que siguen propician el uso de este instrumento para medir y también para verificar anticipaciones:

Problemas 4, 5, 6 y 7

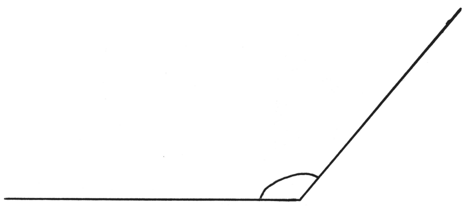
4) ¿Cuánto mide un ángulo recto?

5) ¿Cuánto podría medir un ángulo agudo? ¿Y un ángulo obtuso?

6) Sin medirlos, decidí cuál es la medida de cada uno de estos ángulos, y explicá cómo hiciste para saber. Podés usar el transportador para verificar tus respuestas.



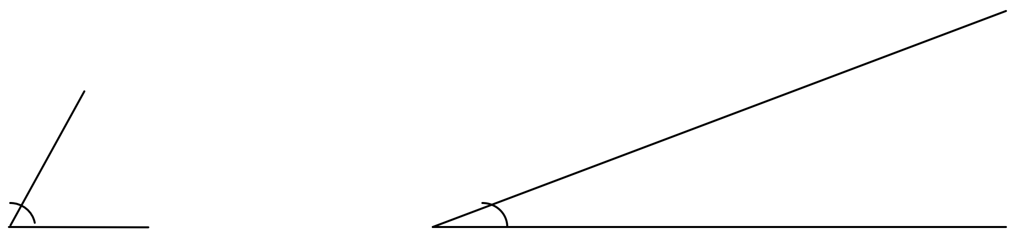
100° 90° 80°



130° 50° 20°

160° 40° 180°

7) Sin medir, determiná cuál de estos dos ángulos es mayor. Verificá tu respuesta usando el transportador.



Los problemas 4 y 5 podrán resolverse a partir de la medición sobre construcciones que los alumnos han realizado en problemas anteriores. También el maestro podría ofrecer medidas de ángulos y preguntar si les parece que serán agudos u obtusos. Por ejemplo: *“Un ángulo de 46°, ¿será agudo o será obtuso? ¿Y uno de 112°? ¿Y uno de 89°? ¿Y uno de 92°?”* . El objetivo de este tipo de pregunta es que los niños puedan extender la relación que ya vienen estudiando entre estos tres tipos de ángulos, incluyendo ahora valores numéricos. De este modo, se apunta a reflexionar en torno a “los ángulos agudos van a medir menos que 90° porque son más chicos que los rectos, que miden 90°, etc.

El problema 6 plantea la ampliación de este análisis. Para responder, los niños podrían descartar los valores que seguro no pueden ser. Por ejemplo, en el último caso no puede tratarse de un ángulo de 40°, puesto que en ese caso debería ser un ángulo de menor abertura que un recto. Tampoco puede tratarse de un ángulo de 180° puesto que en ese caso las dos líneas quedarían “acostadas”, formando una sola línea.

El problema 7 hace posible discutir la independencia entre la medida de un ángulo y de los lados que lo definen. Los niños suelen tener muchas dificultades con esta idea, puesto que creen que si se alargan los lados, el ángulo se agranda. El uso del transportador permite establecer que ésto no es cierto. Será interesante proponer algunas actividades relacionadas. Por ejemplo, el maestro podría preguntar:
“¿Se pueden dibujar dos ángulos rectos con lados de distintas medidas?”
“Dibujá un ángulo obtuso cuyos lados midan 4 cm cada uno. ¿Podrías dibujar un ángulo igual pero con lados más largos? ¿Y más cortos? ¿Cómo harías?”
El trabajo con la escuadra permite trazar ángulos rectos cuyos lados pueden medir más centímetros o menos centímetros; sin embargo todos medirán 90°. Reflexiones como *“Todos miden 90° aunque éste tenga lados más largos y éste más cortos, porque todos son ángulos rectos”* son indicadores de un gran avance en el tipo de razonamiento deductivo que se trata de propiciar a partir del estudio de problemas geométricos.

Los problemas que siguen ponen en juego una nueva figura geométrica: el triángulo.

Problemas 8 y 9

8) Este es uno de los lados de un triángulo. Completalo con otros dos lados, uno de 6 cm y el otro de 5 cm.

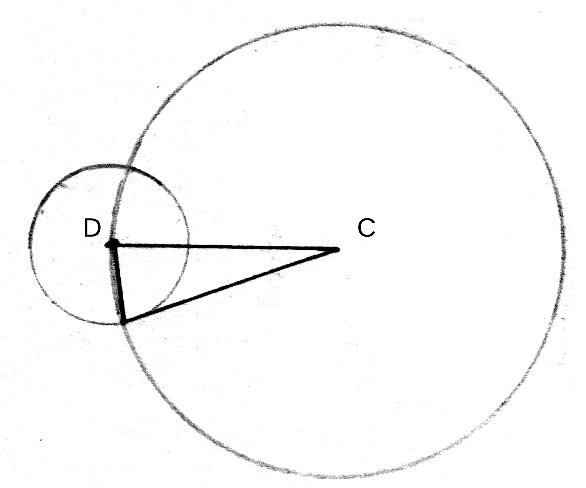
9) Joaquín dice que se puede construir el triángulo del problema 8 usando el compás. Juntate con un compañero y discutan cómo podría hacerse. Luego, constrúyanlo en una hoja lisa.

Para resolver el problema 8 los niños suelen hacer muchos ensayos utilizando sólo la regla. La imposibilidad de controlar la abertura necesaria para que el triángulo cierre favorece la introducción del compás como instrumento adecuado para este trazado. El problema 9 intenta enfocar la atención en esta cuestión. En este momento podría releerse el último problema de la sección anterior, e identificar que en ese problema, el la intersección de las dos circunferencias de 2 cm de radio determinaba dos puntos que estaban a la vez a 2 cm de cada uno de los centros. El maestro podría proponer que se tracen los segmentos que unen los puntos A y B con alguno de estos dos puntos equidistantes (por ejemplo, con el que queda por “arriba” del segmento AB), de modo de dejar en evidencia la presencia de un triángulo. Puede discutirse la utilidad de esta estrategia para construir un triángulo en las condiciones del problema 8. Será necesario analizar la longitud del radio que deberían tener las circunferencias a trazar, y los puntos en los que se hará centro con el compás. También podrían discutirse las distintas posibilidades en la construcción si se invierten estas circunferencias (es decir, si se hace centro en el otro vértice), o si se toma el punto que queda por “debajo” del segmento de referencia en lugar de tomar el que queda por “arriba”.

El problema 10 propicia el análisis de una figura en términos deductivos: sin medir, los niños deberán establecer cuál es la longitud de tres segmentos presentes en un dibujo. Posiblemente sea ésta una de las primeras veces que los alumnos se enfrentan a la necesidad de producir argumentos sin utilizar procedimientos empíricos. Será necesario que el maestro ayude a los niños a apoyarse en las relaciones que están garantizadas debido a las características de las figuras en juego. En este caso, dado que los lados del triángulo son radios de las circunferencias, el triángulo tiene dos lados de 3 cm y un lado de 1 cm.

Problema 10

10) **Para hacer de a dos**: Sin medir tienen que determinar la longitud de los lados del triángulo de esta figura. Les damos algunas pistas: la circunferencia de centro C tiene 3 cm de radio, y la de centro D, tiene 1 cm de radio.



Los problemas siguientes proponen la discusión en torno a ciertas propiedades y características de los triángulos:

Problemas 11, 12, 13, 14 y 15

11) a) Construí un triángulo que tenga un lado de 5 cm, otro de 3 cm, y el tercero de la medida que quieras.
  b) ¿Es posible construir dos triángulos distintos?
  c) ¿Es posible que el tercer lado mida 8 cm? ¿Y 9 cm? ¿Por qué?

12) ¿Se puede construir un triángulo isósceles con los datos del problema 11 a)?

13) ¿Qué tipo de triángulo es el que está dibujado en el problema 10? ¿Cómo te das cuenta?

14) a) Construí un triángulo que tenga un lado de 3 cm, otro lado de 4 cm y que formen un ángulo de 90°.
  b) ¿Se puede construir un triángulo isósceles con un ángulo recto?

15) Construí un triángulo escaleno con un lado de 5 cm, otro lado de 4 cm y el ángulo entre ellos que mida 100°.

16) Construí un triángulo equilátero cuyos lados midan 4 cm, utilizando el compás.

El problema 11 centra la atención en que la medida del tercer triángulo dependerá del ángulo que definan los lados de medidas dadas, por lo que es posible construir más de un triángulo en estas condiciones. Las preguntas propuestas en el punto c) propicia la discusión de una propiedad de los triángulos: la suma de dos de sus lados siempre debe se mayor que el tercer lado. Si los alumnos han construido varios triángulos de lados 3 cm y 5 cm, podrían medir las diferentes longitudes del tercer lado y establecer cómo debería variar el ángulo entre ambos para que dicha longitud vaya cambiando. Esto es, a medida que el ángulo sea más grande, el tercer lado irá “creciendo”. Será interesante analizar cuáles podrían ser medidas del tercer lado y cuáles no.

El trabajo exploratorio sobre las construcciones podría llevar a establecer conclusiones como: “Hay medidas que no pueden ser seguro, como por ejemplo 30 cm, o 12 cm, o 9 cm, porque son muy largos y sobran partes de ese lado para cerrar el triángulo. Pueden ser medidas chiquitas, como 1 cm, o 2 cm, porque ahí los lados de 3 cm y de 5 cm están bien pegaditos”. La medida 8 cm puede provocar respuestas diversas; algunos niños probablemente logren construir el triángulo, y dirán que quedó muy chatito porque el tercer lado es demasiado largo. El maestro deberá someter a discusión esta construcción con argumentos que no sean empíricos. Por ejemplo, podría proponer el análisis de razonamientos como el siguiente: “Si un lado mide 8, la única forma de que los lados de 3 y de 5 se toquen es que estén levantados por encima del lado de 8, pero entonces no te queda un triángulo, no cierra".

Se presenta luego de este problema un cartel que explicita esta relación, y que introduce información nueva acerca de la clasificación de los triángulos según sus lados:

***Para tener en cuenta**: En todos los triángulos, el tercer lado tiene que ser menor que la suma de los otros dos lados. Si esto no se cumple, el triángulo "no cierra".*
Los triángulos que tienen tres lados que miden igual se llaman equiláteros. Si dos de sus lados miden lo mismo, estos triángulos se llaman isósceles. Si los tres lados son diferentes, el triángulo se llama escaleno.

En el problema 12, se apunta a que los niños reutilicen la propiedad que se ha enunciado a partir del problema anterior en lugar de ensayar las construcciones. Por ejemplo, podrían decir: *"Se puede construir un triángulo con dos lados de 5 cm y el otro de 3 cm porque la suma de dos de ellos siempre da más grande que el tercero".*

Para la parte b) del problema 14 se propone analizar la posibilidad de que dos de los lados de un triángulo sean de la misma medida y uno de los ángulos, recto. Se espera que los niños puedan apoyarse en la parte a) para establecer que podrían igualar las medidas del par de lados que forman el ángulo recto para llevar a cabo la construcción requerida.

Se presenta un cartel que informa el nombre de este tipo de triángulo:

***Para tener en cuenta**: Los triángulos que tienen un ángulo recto se llaman "triángulos rectángulos".*

Los problemas que siguen requieren la reutilización de lo estudiado en los problemas anteriores.

10° parte: Repasar y estudiar Geometría

En esta última parte se apunta a que los niños puedan revisar los conocimientos que han circulado durante las clases en las que se han resuelto problemas de Geometría. En una primera actividad, cada uno deberá identificar aquellos problemas que les han resultado "difíciles", y se dedicará un tiempo para que vuelvan a resolverlos. Para ello, será interesante revisar algunas de las conclusiones elaboradas, y establecer cuáles de ellas pueden ser útiles. Podrían releerse también los carteles "Para tener en cuenta" que han aparecido a lo largo del material.

En segundo término, se propone una colección de problemas para revisar algunos de los conceptos estudiados. Es una buena oportunidad para que vuelvan a circular relaciones y vocabulario específico, de modo que mayor cantidad de niños tengan oportunidad de utilizarlos, analizarlos e incorporarlos como propios. También en este caso volver a leer los carteles "Para tener en cuenta" puede ser de utilidad.

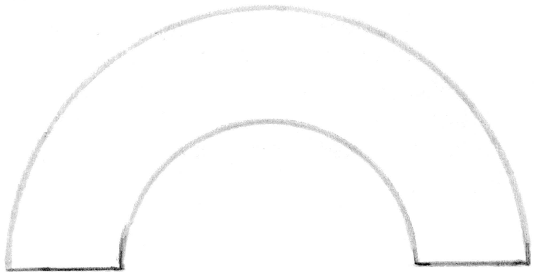
Este espacio de repaso y estudio permite al docente identificar la existencia de aspectos que será necesario retomar, errores que persisten, nuevas relaciones que han sido incorporadas por la mayor parte de la clase, etc.

Actividades 1 y 2

1) En esta última parte del material estudiaste problemas con círculos, circunferencias, ángulos y triángulos. Volvé a mirar todo lo que hiciste y marcá los problemas que te resultaron más difíciles. Luego, intentá hacerlos de nuevo.

2) Resolvé estos ejercicios que te van a servir para repasar lo que estudiaste:

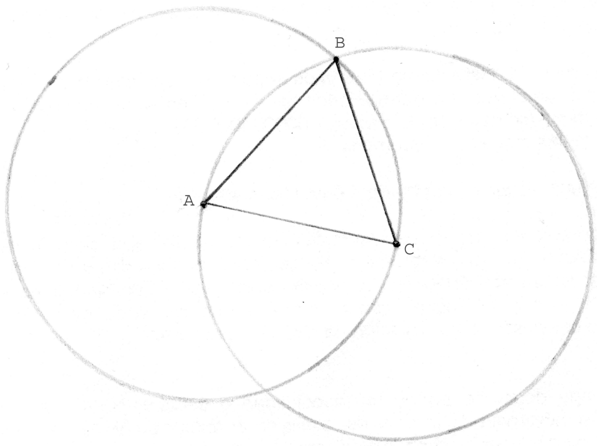
a) Copiá en una hoja lisa el siguiente dibujo. Antes de empezar, anticipá por dónde te conviene comenzar a copiar, cuántas veces tendrás que pinchar el compás y cómo podés saber cuánto tenés que abrirlo.



b) Construí en una hoja lisa una circunferencia de 4 cm de diámetro.

c) Marcá todos los puntos que se encuentren a menos de 2 cm de la cruz.

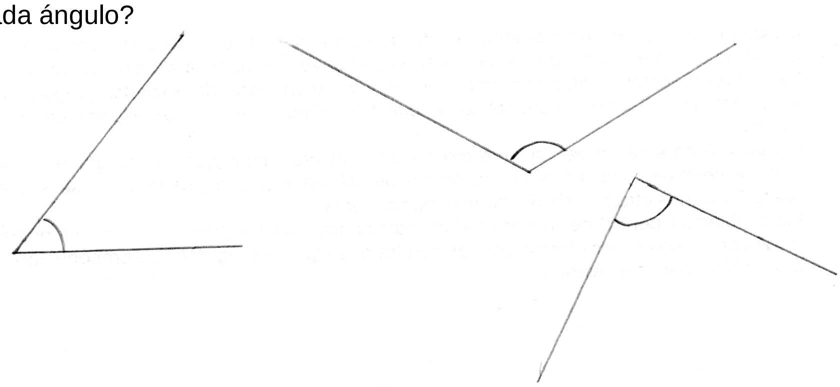
d) El radio de la circunferencia de centro A mide lo mismo que el radio de la circunferencia de centro C. Sin medir, decidí si es cierto que el triángulo ABC es equilátero. Explicá tu respuesta.



e) Utilizando regla y compás, construí en una hoja lisa un triángulo con dos lados de 4 cm y el tercero de 3 cm.

f) Construí en una hoja lisa un triángulo rectángulo de lados 6 cm, 8 cm y 10 cm, usando regla y escuadra o transportador.

g) ¿Cuánto mide cada ángulo?



h) Construí en una hoja lisa un triángulo isósceles con un ángulo de 110°.