Presidente de la Nación
Dr. Néstor Kirchner

Ministro de Educación, Ciencia y Tecnología
Lic. Daniel Filmus

Secretario de Educación
Lic. Juan Carlos Tedesco

Subsecretaria de Equidad y Calidad Educativa
Lic. Alejandra Birgin

Directora Nacional
de Gestión Curricular y Formación Docente
Lic. Laura Pitman

Ministerio de Educación Ciencia y Tecnología
Matemática: leer, escribir y argumentar. - 1a ed. - Buenos Aires:
Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación, 2007.
48 p. ; 22 x 17 cm.

ISBN 978-950-00-0626-2

1. Formación Docente. I. Título
CDD 371.1

Colofón
XXXXXXXXXXXX

MATEMÁTICA

Leer, escribir y argumentar

ÚLTIMO AÑO PRIMARIA/
INICIO SECUNDARIA

SERIE CUADERNOS
PARA EL AULA
DOCENTES

nap

NÚCLEOS
DE APRENDIZAJES
PRIORITARIOS

MINISTERIO de EDUCACIÓN
CIENCIA y TECNOLOGÍA
PRESIDENCIA de la NACIÓN

Subsecretaría de Equidad y Calidad Educativa

Área de producción pedagógica *Cuadernos para el aula*
Coordinación general
Adela Coria

Equipo pedagógico
Rosa Rottemberg
Analía Segal

Equipo de elaboración de contenidos
Equipo autoral
Mónica Agrasar
Alejandro Rossetti

Supervisión de contenidos y lectura crítica
Graciela Chemello, Área de Matemática de la Dirección Nacional de Gestión Curricular y Formación Docente
Mónica Agrasar, Área de Matemática de la Dirección Nacional de Gestión Curricular y Formación Docente

Área de producción editorial
Coordinación de Publicaciones
Raquel Franco

Brenda Rubinstein, *Asistencia de coordinación*
Silvana Franzetti, *Edición*
Carolina Mikalef, Alejandro Luna, *Dirección de arte*
Geni Expósito, *Coordinación gráfica*
Albert Caut, *Diagramación*
María Eugenia Más, *Ilustración*

Presentación

Hoy renovamos nuestro encuentro con las escuelas, maestros y profesores a través de estos materiales, como una de las formas en que se expresa el esfuerzo que estamos realizando desde las políticas públicas por contribuir a revertir las desigualdades a lo largo y a lo ancho de nuestro territorio. Son múltiples los pasos que hemos dado por crear mejores condiciones escolares para todos. Pero sabemos que todavía niñas, niños y jóvenes son parte de una realidad donde la pobreza y la exclusión social muestran de manera desgarradora la enorme deuda que tenemos con ellos y con su futuro.

Las brechas sociales se manifiestan también en la fragmentación de nuestro sistema educativo, en la desigualdad de trayectorias y aprendizajes, y en las dificultades que enfrentan los docentes al momento de enseñar.

En las circunstancias más difíciles, las escuelas se sostuvieron como uno de los lugares en los que se continuó albergando un sentido de lo público, resguardando y produciendo las condiciones para que pudiéramos volver a pensar en la posibilidad de un todos. Maestros y profesores redoblan sus esfuerzos, persisten en la búsqueda de alternativas, y todos los días ponen en juego su saber en la construcción de renovadas prácticas.

Al reasumir desde el Estado la responsabilidad de acompañar el trabajo cotidiano de los docentes, buscamos recrear los canales de diálogo y de aprendizaje, afianzar los espacios públicos y garantizar las condiciones para pensar colectivamente nuestra realidad y, de este modo, contribuir a transformarla.

En este caso particular, se trata de materiales para el momento de pasaje y de nexo entre los distintos niveles educativos, que resulta clave en la experiencia de escolarización de los alumnos y en la tarea docente, y reclama todo el apoyo y acompañamiento que desde el Estado podamos ofrecerle. Abordar el problema de la ausencia de experiencias de escolarización comunes pasa a ser un tema crucial cuando pensamos en la finalización de la escolaridad primaria y en el inicio de la escuela secundaria.

Creemos que es preciso fortalecer nuestra escuela, rescatar el lugar inicial que tiene la tarea docente en la distribución social del conocimiento y en la recreación de nuestra cultura y renovar nuestros modos de construir la igualdad, restituyendo el lugar de lo común y de lo compartido, y albergando a su vez la diversidad de historias, recorridos y experiencias que nos constituyen.

Transitamos una época de incertidumbre, de cuestionamientos y frustraciones. No nos alcanza con lo que tenemos ni con lo que sabemos. Pero tenemos y sabemos mucho, y estamos vislumbrando con mayor nitidez un horizonte alentador.

Como educadores, nos toca la inquietante tarea de acompañar en una nueva etapa a nuestros alumnos y poner a disposición de todos y de cada uno de ellos nuestras mejores herramientas de indagación, de pensamiento y de creación. En el encuentro que se produce entre estudiantes y docentes reside la posibilidad de la transmisión, con todo lo que ello trae de renovación, de nuevos interrogantes, de replanteos y de oportunidades para cambiar el mundo en el que vivimos.

Lo prioritario hoy es recuperar y consolidar la enseñanza como oportunidad de construir otro futuro. Frente a ese desafío y el de construir una sociedad más justa, las escuelas tienen encomendada una labor fundamental: transmitir a las nuevas generaciones los saberes y experiencias que constituyen nuestro patrimonio cultural. Educar es un modo de invitar a los niños y a los jóvenes a protagonizar la historia y a imaginar mundos cada vez mejores.

La escuela puede contribuir a unir lo que está roto, a vincular los fragmentos, a tender puentes entre el pasado y el futuro. Estas son tareas que involucran de lleno a los docentes en tanto trabajadores de la cultura. La escuela también es un espacio para la participación y la integración; un ámbito privilegiado para la ampliación de las posibilidades de desarrollo social y cultural del conjunto de la ciudadanía.

Cada día, una multitud de chicos y chicas ocupa nuestras aulas. Cada día, las familias argentinas nos entregan a sus hijos, porque apuestan a lo que podemos darles, porque confían en ellos y en nosotros. Y la escuela les abre sus puertas. Y de este modo no solo alberga a niños y jóvenes con sus búsquedas, necesidades y preguntas, sino también a las familias que, de formas heterogéneas, diversas, muchas veces incompletas y también atravesadas por dolores y renovadas esperanzas, vuelven una y otra vez a depositar en la escuela sus anhelos y expectativas. Nuestros son el desafío y la responsabilidad de recibir a los nuevos, ofreciéndoles lo que tenemos y, al mismo tiempo, confiando en que ellos emprenderán la construcción de algo distinto, algo que nosotros quizá no imaginamos todavía.

En la medida en que nuestras aulas sean espacios donde podamos someter a revisión y crítica la sociedad que nos rodea, y garantizar el derecho de todos los niños, niñas, jóvenes y adultos de acceder a los saberes que resultan imprescindibles para participar en ella, podremos hacer de la educación una estrategia para transformarla.

La sanción de la Ley de Educación Nacional inscribe en el plano legal ese sentido de apuesta por un futuro más justo, y plasma en sus principios y decisiones fundamentales un fuerte compromiso de los Estados nacional y provinciales por construir ese horizonte de igualdad al que aspiramos como ciudadanos. La definición de los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios forma así parte del intenso programa de trabajo propuesto por la nueva Ley y de una política educativa que, en la firme perspectiva de un mediano plazo, busca garantizar una base común de saberes para todos los niños y jóvenes del país. Detrás de esta decisión existe una selección deliberada de conocimientos fundada en apreciaciones acerca de cuáles son las herramientas conceptuales que mejor condensan aquello que consideramos valioso transmitir en la escuela. También, una intención de colocar la enseñanza en el centro de la deliberación pública sobre el futuro que deseamos y el proyecto social de país que buscamos.

Es nuestro objetivo hacer de este conjunto de saberes y del trabajo en torno a ellos una oportunidad para construir espacios de diálogo entre los diversos actores preocupados por la educación, espacios que abran la posibilidad de desarrollar un lenguaje y un pensamiento colectivos; que incorporen la experiencia y los deseos de nuestros maestros y profesores, y que enfrenten el desafío de restituir al debate pedagógico su carácter público y político.

Lic. Alejandra Birgin
Subsecretaria de Equidad
y Calidad Educativa

Lic. Daniel Filmus
Ministro de Educación,
Ciencia y Tecnología

Para dialogar con los Cuadernos para el aula

La serie *Cuadernos para el aula* tiene como propósito central aportar al diálogo sobre los procesos pedagógicos que maestros y maestras, profesores y profesoras sostienen cotidianamente en las escuelas del país, en el trabajo colectivo de construcción de un suelo compartido y de apuesta para que niños, jóvenes y adultos puedan apropiarse de saberes valiosos para comprender, dar sentido, interrogar y desenvolverse en el mundo que habitamos.

Quienes hacemos los *Cuadernos para el aula* pensamos en compartir, a través de ellos, algunos “hilos” para fortalecer propuestas para la enseñanza a partir de los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Así, estos libros buscan tramar algunos saberes priorizados en múltiples itinerarios de trabajo, dejando puntas y espacios siempre abiertos a nuevos trazados, buscando sumar voces e instancias de diálogo con variadas experiencias pedagógicas. No nos mueve la idea de hacer propuestas inéditas, de “decir por primera vez”. Por el contrario, nos mueve la idea de compartir algunos caminos, secuencias o recursos posibles; sumar reflexiones sobre algunas condiciones y contextos específicos de trabajo; poner a conversar invenciones de otros; abrir escenas con múltiples actores, actividades, imágenes y lecturas posibles.

Con ese propósito, el Ministerio Nacional acerca esta serie que progresivamente se va completando y renovando. En esta oportunidad, damos continuidad a la colección presentando una nueva propuesta para el último año de la escuela primaria o la etapa inicial de la escolaridad secundaria, según cómo se haya organizado cada provincia de nuestro país. Se trata, en cualquier caso, de acompañar a chicos y chicas en un tiempo desafiante de pasaje, cierre y apertura, un hito en el largo camino formativo que supone la escolaridad obligatoria. Necesitamos pensar cómo inscribir nuestras propuestas de enseñanza en el marco de una escuela que se interroga sobre sus formas habituales de producir encuentro con las más diversas producciones culturales. Una escuela en la que niños y jóvenes sientan que tiene sentido permanecer, que provoca exigentes desafíos intelectuales, que convoca al conocimiento y la expresión de los afectos, certezas y temores. Desde las propuestas que ofrecemos, buscamos construir un lugar para los chicos, reconocerlos en problemáticas que desaten novedosos intereses, modos de pensar, productividad e imaginación, siempre también desde el nuestro, como un lugar que se inquieta por ayudar a renovar su deseo de aprender.

La propuesta que hoy presentamos incluye producciones para diferentes ejes de los campos de conocimientos priorizados en la primera etapa de definición de los NAP: Matemática, Lengua, Ciencias Sociales y Ciencias Naturales. Se trata de un esfuerzo por abrir temáticas y tratamientos metodológicos que creemos sugerentes caminos para contribuir a crear en las aulas ámbitos de problematización y diálogos renovados con el conocimiento.

En todos los casos, incluimos reflexiones que traman los aspectos específicos de las disciplinas escolares con reflexiones sobre temas pedagógico-didácticos que constituyen también renovadas preocupaciones sobre la enseñanza. Hemos construido una propuesta que articula diversas producciones. Para cada campo de conocimiento, incluye como materiales de trabajo un libro y una Antología con textos de interés para alumnos; un Cuaderno para docentes que está ahora en sus manos y, en varios casos, la selección de producciones cinematográficas u otras formas de representación que podrán ser incorporadas a distintos itinerarios de trabajo.

Sabemos que el espacio de relativa privacidad del aula es un lugar donde resuenan palabras que no siempre pueden escribirse, que resisten todo plan: espacio abierto al diálogo, muchas veces espontáneo, otras ritualizado, donde se condensan novedades y rutinas, silencios y gestos, lugar agitado por preguntas o respuestas impensadas o poco esperadas; lugar conocido y enigmático a la vez, lugar de la prisa. En esos vaivenes de la práctica, paradójicamente tan reiterativa como poco previsible, se trazan las aristas que definen nuestra compleja identidad docente. Una identidad siempre cambiante —aunque imperceptiblemente— y siempre marcada por historias institucionales del sistema educativo y sociocultural más general; una identidad que nos hace ser parte de un colectivo docente, de un proyecto pedagógico, generacional y ético-político.

Desde los *Cuadernos para el aula*, como seguramente podrá ocurrir desde muchas otras instancias, nos proponemos poner en foco las prácticas desplegadas cada día. En ese sentido, esperamos puedan dialogar con preguntas que nos hacemos habitualmente como docentes, preocupados por habilitar el espacio escolar a experiencias de valor para la vida de niños y jóvenes, experiencias que en particular les permitan situarse de modos cada vez mas críticos en relación con el conocimiento del mundo en que viven. Las múltiples configuraciones que puede adoptar la clase en función de nuestras propuestas didácticas construidas para la ocasión están desafiadas a incluir las inquietudes, experiencias y saberes sociales de nuestros chicos y jóvenes, muchos de ellos altamente novedosos para nuestra mirada adulta. A veces, nos llevarán a esperar y entender su silencio, otras, a preguntarnos sobre su indiferencia, a ser tolerantes al mismo tiempo que a asumir una posición activa que busca alternativas capaces de convocarlos, de provocarlos, al deseo de aprender, de saber, de conocer.

Queremos acercarnos a ese espacio de las prácticas con una idea importante. Las propuestas de los *Cuadernos para el aula* dialogan a veces con lo obvio, que por conocido resulta menos explorado. Pero al mismo tiempo parten de la idea de que no hay saberes pedagógico-didácticos generales o específicos que sean universales y por tanto todos merecen repensarse en relación con cada contexto singular, con cada historia de maestro o profesor y de hacer escuela.

Este hacer escuela nos reúne en un tiempo en el que subsisten profundas desigualdades. Nuestra apuesta es aportar a superarlas en algún modesto sentido, con conciencia de que hay problemas que rebasan la escuela, y sobre los cuales no podemos incidir exclusivamente desde el trabajo pedagógico. Nuestra apuesta es contribuir a situarnos como docentes y situar a niños y jóvenes en el lugar de ejercicio del derecho al saber.

Desde ese lugar hablamos en relación con lo prioritario hoy en nuestras escuelas y aulas; desde ese lugar y clave de lectura, invitamos a recorrer estos Cuadernos. Sabemos que es en el ámbito escolar y en cada aula donde se ponen en juego novedosas búsquedas, y también las más probadas respuestas, aunque las reconozcamos tentativas. Hay siempre un texto no escrito sobre cada práctica: es el texto de la historia por escribir de los docentes de cada escuela.

Esta serie precisamente pretende ser una provocación a la escritura. Una escritura que lea y recree, una escritura que discuta, una escritura que dialogue sobre la enseñanza, una escritura que seguirá agregando páginas a estos Cuadernos.

El equipo de *Cuadernos para el aula*

Índice

Decisiones

¿Cómo está organizado el material?

En este *Cuaderno para el docente* se presenta tanto la explicitación del sentido de la propuesta y de los criterios que se utilizaron para elaborar las actividades del material destinado a los alumnos, como algunas sugerencias para la gestión de la clase.

Por su parte, el libro para el alumno incluye propuestas de trabajo que apuntan, por una parte, a que los alumnos establezcan relaciones entre los conocimientos que en la escuela suelen tratarse en diferentes unidades de trabajo y, por otra, a sostener una práctica matemática ligada a la producción, promoviendo un avance hacia la generalización, que los alumnos profundizarán en los años siguientes.

En principio, se trata de reflexionar sobre conocimientos cuya adquisición se ha iniciado en Primer y Segundo Ciclos, explicitando algunas prácticas que son parte del trabajo matemático, para dar lugar a la construcción de nuevas relaciones.

La reflexión sobre los conocimientos ya adquiridos intenta superar el fraccionamiento al que frecuentemente se recurre en la enseñanza cuando se subdivide un saber en unidades de conocimiento parciales con la intención de tornarlo accesible. Sin embargo, una consecuencia de aplicar sistemáticamente este recurso es que luego la suma de las partes no devuelve el todo.

Enseñar, por ejemplo, fracciones por un lado, por otro expresiones decimales y en una tercera instancia, proporcionalidad no permite que los alumnos se apropien de la noción de número racional en toda su dimensión. No debemos sorprendernos entonces si los chicos no ven en 1/4, 25% y 0,25 tres expresiones de un mismo número, si no han tenido aún la oportunidad de articular estas escrituras.

Las actividades que se presentan en cada capítulo de *Leer, escribir y argumentar* no constituyen unidades o secuencias didácticas organizadas en función del desarrollo exhaustivo de los contenidos del último año de la escuela Primaria o el inicio de la Secundaria. La selección intenta profundizar los niveles de argumentación, relacionar las distintas representaciones conocidas de algunos objetos matemáticos como así también incluir una mirada analítica sobre el campo de validez de las afirmaciones que se realizan.

En este sentido, las actividades de cada tema podrían formar parte de secuencias más extensas diseñadas por el propio docente, podrían anteceder el tratamiento de alguna temática particular o podrían realizarse como cierre de una unidad de trabajo. En consecuencia, los cuatro temas que se desarrollan en cada capítulo pueden abordarse entonces en un orden distinto al presentado, según la planificación del docente.

Cada capítulo se inicia con una presentación del eje que articula la propuesta (el capítulo 1, *los cambios* y el capítulo 2, *la validación*) y luego se presenta un acertijo que invita a iniciar la tarea y permite, a la vez, activar algunos conocimientos disponibles sobre estas cuestiones. Luego, se desarrollan cuatro secuencias de problemas para distintos temas. Al iniciar cada tema, se formulan dos preguntas que tienen el propósito de anticipar a los alumnos el foco del trabajo y que se recuperan en el apartado *Reflexiones*, para organizar y sistematizar las conclusiones producidas.

Al finalizar cada capítulo, en *Para seguir pensando,* primero se propone vincular las conclusiones elaboradas para cada uno de los temas a próposito del eje planteado al inicio y luego se presenta un nuevo problema que invita a formularse preguntas con un mayor nivel de generalidad.

Las propuestas presentadas tienen el sentido de avanzar hacia una matemática de alcance más general, que incluye la posibilidad de dominar variadas formas de expresión para una misma situación, seleccionando la más adecuada según el problema que se trate, y la necesidad de formular argumentos para dar cuenta de lo realizado y discutir su validez.

De este modo, los aprendizajes ganarán en relaciones y el alumno fortalecerá la confianza en sus posibilidades de hacer matemática. Si consolidamos la idea de que un mismo problema se puede resolver con una amplia gama de procedimientos, los chicos y chicas no se verán obligados a recordar exclusivamente una única modalidad de resolución. Y, a su vez, si esas diversas formas de atacar un problema se relacionan entre sí, se potenciará su alcance como instrumentos de resolución. El desafío es mucho más profundo que proporcionar solo una mayor cantidad de herramientas resolutivas. Si los conocimientos permanecen aislados e inconexos, no logran constituir un cuerpo lógico coherente y, en general, solo se dominan algunas técnicas sin conocer las razones que las sustentan.

Si bien en último año de Primaria/inicio de Secundaria se cierra una etapa de trabajo muy importante, los conocimientos que de ella se originen deberían habilitar la iniciación al álgebra y a las formas de validación más generales. Esta instancia educativa no es simplemente el final de un proceso, sino que se constituye como la transición a nuevas posibilidades de trabajo matemático.

La propuesta retoma los propósitos generales planteados en los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios y el enfoque de enseñanza ligado a establecer en la clase un ámbito de producción de conocimientos para que estos resulten significativos para los alumnos.

Así, un alumno que trabaja construyendo el sentido de los conocimientos:

- Confiará más en sus propias posibilidades para resolver problemas y formularse interrogantes.

- Reforzará la concepción de la matemática como una disciplina en la que los resultados se obtienen como consecuencia necesaria de la aplicación de ciertas relaciones.

- Fortalecerá la disposición para defender su propio punto de vista, para considerar ideas y opiniones de los otros, debatirlas y elaborar conclusiones.

- Podrá reconocer en el debate que puntos de vista aparentemente diferentes sólo difieren en la expresión.

- Podrá considerar, a partir de instancias de validación, que los errores son inherentes al proceso de aprendizaje.

- Contará con más recursos para elaborar procedimientos para resolver problemas.

- Podrá interpretar la información presentada en forma oral o escrita, con textos, tablas, dibujos fórmulas, gráficos. Y podrá pasar de una forma a otra cuando la situación lo requiera.

- Podrá interpretar y producir textos con información matemática, avanzando en el uso del lenguaje apropiado.

- Podrá, a partir de la comparación de las producciones realizadas al resolver problemas, analizar su validez y su adecuación a la situación planteada.

¿Qué tipo de actividad matemática se propone en el aula?

Estudiar matemática debe implicar hacer matemática. No se logran genuinos aprendizajes en el área sin concebir un alumno activo que asuma una tarea que va mucho más allá de repetir y reproducir fielmente lo que el docente expone.

Se puede sostener que estudiar matemática es hacer matemática en el sentido más amplio, puesto que demanda la puesta en funcionamiento de un conjunto de prácticas tales como apropiarse de una problemática específica, indagar las condiciones particulares y generales que involucra, reconocer las regularidades que presenta, generar conjeturas y formular sus ideas en forma oral o escrita, modelizar, identificar nociones teóricas con las que se puede atacar el problema, desplegar técnicas aceptadas en ese cuerpo teórico, validar lo realizado, analizar el campo de validez de un cierto resultado o procedimiento. El alumno que repite elaboraciones impuestas, desconociendo las razones que le dieron origen solo tendrá alguna información empobrecida y deformada de ellas. Frente a esto, se someterá al aprendizaje de técnicas sin conocer su sentido o creyendo que es él quien no se lo encuentra, comenzará a pensar que la matemática es para unos pocos y, muy probablemente, él mismo no se considere uno de esos pocos.

Bajo esta concepción, enseñar matemática es ayudar a estudiar matemática y como docentes, somos responsables de los temas de discusión dentro del aula y de su orientación. Sabemos por experiencia que brindar explicaciones sumamente claras, completas y concisas no es la manera para que los alumnos aprendan y puedan resolver los problemas sin dificultades. Por el contrario, tras el afán de ser muy claros en una explicación, cerramos la posibilidad de que el alumno lo piense por sí mismo e interactúe con el problema. Preocuparnos por el aprendizaje matemático de nuestros alumnos nos exige elegir cuidadosamente los problemas que proponemos, conducir convenientemente los intercambios de ideas, promover la enunciación de argumentaciones, saber escuchar y reorientar en caso de necesidad, promover reflexiones sobre los procedimientos, impulsar la generación de instancias de validación. Las decisiones que tomamos pueden abrir la puerta de acceso y constituir una invitación genuina al conocimiento o solo mostrar por una ventana un maravilloso banquete de saberes del que el alumno jamás logrará participar. En “Enseñar matemática en el segundo ciclo” de *Cuadernos para el aula: Matemática 6*, pueden encontrarse otras referencias al tipo de práctica que aquí se describe.

¿Qué matemática se espera en el último año de Primaria/inicio de Secundaria?

Este es un momento en el que se concentran un conjunto de expectativas sobre los aprendizajes matemáticos de nuestras alumnas y alumnos, pues se analiza en qué medida lo aprendido podrá ser punto de apoyo para lo nuevo. A los conocimientos aritméticos les sucederán los algebraicos y a la geometría de la medida le sucederá la geometría de la demostración.

Para preparar este cambio, es necesario analizar críticamente el estado de los conocimientos disponibles. Una posibilidad muy potente es volver sobre contenidos ya trabajados, pero con una intención netamente argumentativa. Veamos un primer ejemplo, considerando las cuestiones del cálculo de productos y sus propiedades.

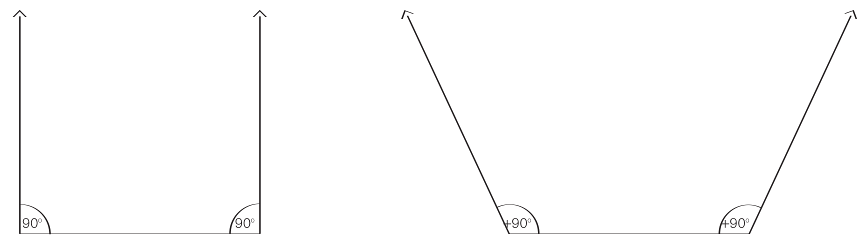
Para un alumno de escuela media, el éxito de su escolaridad no depende de si logra o no resolver una cuenta de multiplicar por un gran número de cifras, pero se encuentra en condiciones desfavorables si no reconoce qué propiedades fundamentan sus modalidades de cálculo. Si el alumno no reconoce que la propiedad distributiva sustenta al algoritmo de la multiplicación, ¿en qué sentido sabe multiplicar? Al hacer la cuenta 125 x 15, resolvemos 125 x 5 + 125 x 10. Esto es posible porque se puede descomponer 15 como 10 + 5, y por la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición: 125 x (10 + 5) = = 125 x 10 + 125 x 5. La misma propiedad es la que permite a los alumnos recuperar productos que no recuerdan. Si los chicos han olvidado el producto de 6 x 7, suelen sumar 6 al producto de 6 x 6. Esto, nuevamente, es posible porque 7 = 6 + 1 y 6 x 7 = 6 x (6 + 1). Luego 6 x (6 + 1) = 6 x 6 + 6 x 1. Es decir que, tanto para el cálculo algorítmico como para el cálculo pensado, las propiedades brindan la justificación que los hace válidos.

Cuando a los problemas de la aritmética le sucedan los problemas de alcance más general del álgebra y sea necesario reinterpretar la simbología conocida, será imprescindible apoyarse en la aritmética. Las propiedades de los números y sus operaciones serán un punto de apoyo para construir las operaciones con expresiones algebraicas.

Hemos planteado que otro cambio importante es pasar de la geometría de la medida a la geometría de la demostración, y el acceso a la demostración geométrica incluye una mirada reflexiva sobre las construcciones geométricas.

Para comenzar a producir pruebas es fundamental replantear el rol del ejemplo y, con este fin, los ejemplos deben ser relevantes y sustantivos. Aceptar la validez de una afirmación implica, a su vez, garantizar que no existe un contraejemplo. Es decir, un caso particular que no quede implicado en la afirmación. Por ejemplo, basta mencionar el caso de los trapecios isósceles para asegurar que no es cierto que si un cuadrilátero tiene diagonales congruentes, la figura es un paralelogramo.

En otras ocasiones, contradecir la propiedad puede tornarla más evidente. Por ejemplo, a partir del trabajo con la suma de los ángulos interiores de un triángulo, se puede proponer construir un triángulo que posea dos ángulos interiores rectos y construir un triángulo que posea dos ángulos interiores obtusos.



La reflexión sobre estos dos casos permite afirmar que todo triángulo posee al menos un par de ángulos interiores agudos. Esto, a su vez, permitirá reconsiderar los criterios utilizados para clasificar un triángulo según sus ángulos, pues es suficiente con observar el ángulo más amplio. Si el ángulo mayor es agudo, los otros dos también lo serán y, obviamente, si el mayor es recto u obtuso, el triángulo resultará rectángulo u obtusángulo. Si existieran dos ángulos congruentes y mayores que el otro, el triángulo será necesariamente acutángulo.

En síntesis, recuperar el camino andado con nuevas preguntas y la convicción de que el destino es accesible, es el reto que impone enseñar matemática en el último año de Primaria/inicio de Secundaria.

¿Por qué el tema de *los cambios*?

El primer eje del libro para el alumno es el de los cambios asociados al uso de distintas representaciones de los objetos matemáticos. Así, al hacer matemática, continuamente se transforman escrituras de distintos tipos. Se producen cambios cuando, por ejemplo, una cantidad se expresa con una unidad distinta, una fórmula se escribe de otra forma, se opera para encontrar el resultado de un cálculo, se representan en un gráfico los valores de una tabla, se describe una figura por diferentes conjuntos de condiciones o cuando se expresa de modo general una relación entre números. Conocer las reglas que permiten hacer estas transformaciones sin alterar el sentido de lo que se expresa resulta una cuestión central para controlar el trabajo que se realiza. A la vez, disponer de diversas formas de expresar una noción permite elegir aquella que comunique con mayor claridad el resultado que deseamos y contribuye a dar coherencia al conjunto de conocimientos en estudio.

Al usar una noción matemática en distintos contextos, muchas veces se usan expresiones distintas, aunque equivalentes, asociadas a esos contextos. Por ejemplo, habitualmente usamos $ 0,25 para expresar un precio y 1/4 kg o 250 g para el peso de un objeto, aunque 0,25 = 1/4. Otras veces, transformamos una expresión en otra para facilitar un cálculo, como cuando pensamos en 3/4 como 1/2 + 1/4 o en 75% como 0,75. En ocasiones, se usa una misma escritura pero los significados son diferentes, por ejemplo 0,25 puede ser el resultado de una medición o una constante de proporcionalidad, en tanto que en otras, la situación es una, pero admite distintas escrituras como en el caso de 25 mg/l y 0,25 g/dm^3. Cuando no se advierte esta variedad de situaciones y las diferentes representaciones no se toman como objeto de estudio, estos conocimientos quedan desarticulados.

También, al hacer matemática, se suelen estudiar otro tipo de cambios. Se trata del análisis de variaciones, lo que lleva al uso de un nuevo objeto matemático destinado a representar cambios: las variables. Se propone así una primera aproximación al trabajo que se realizará en los próximos años de escolaridad.

Retomar el estudio de los contenidos para analizar cuándo algo realmente cambia y cuándo no o precisar qué cambia y cómo, permitirá revisar críticamente los conocimientos aritméticos y geométricos adquiridos hasta el momento, para articularlos y reorganizarlos en una estructura más sólida y flexible a la vez.

¿Por qué el tema de *la validación*?

El segundo eje que articula las actividades del libro para el alumno es el de la validación. Efectivamente, si alguien produce la solución a un problema nuevo con una herramienta nueva, quiere asegurarse de que lo que ha hecho sea matemáticamente adecuado. La producción matemática generada a partir de un problema mantiene un grado de incertidumbre que no se disipa plenamente al resolverlo, pues el valor de verdad que posee la respuesta es aún un aspecto a considerar. En consecuencia, esta instancia es fundamental para la plena adquisición de los conocimientos.

Las actividades incluidas en el libro del alumno plantean la necesidad de analizar la validez de los procedimientos matemáticos, de las diversas formas de representación y de las propiedades que aplicamos. Es fundamental considerar que los saberes no resultan plenamente adquiridos hasta no reconocer el rango de validez que presentan. No es lo mismo una afirmación que resulta verdadera solo para algunos casos particulares que otra que lo sea en general. Que una propiedad se cumpla para ciertas figuras, para ciertos números, no implica necesariamente que se cumplirá para otras figuras u otros números.

En muchas ocasiones, los alumnos generalizan afirmaciones que son válidas para algunos casos y que no lo son para otros. Un claro ejemplo de ello lo constituye la discretitud de los naturales. Un alumno que concibe los números racionales bajo la estructura que le proporcionan los números naturales, considerará que todo racional posee sucesor. Así, podrá pensar que $\frac{3}{5}$ es el sucesor de $\frac{2}{5}$ o que 0,6 es el sucesor de 0,5, cuando en realidad hay infinitos números racionales entre ellos. Algo semejante puede ocurrir con las figuras geométricas. En ocasiones, los alumnos consideran que si un polígono posee lados congruentes, entonces es necesariamente regular. Esta afirmación que resulta verdadera para los triángulos, no lo es para los polígonos restantes.

Por estas razones, evaluar el grado de validez de una afirmación es un aspecto esencial para lograr el avance esperado en el conocimiento matemático: *Las exigencias de explicitación, de argumentación, de revisión y de validación brindan oportunidades para transformar el conocimiento y hacerlo más reconocible; son, por esto, elementos esenciales en la construcción del sentido de los conocimientos.*[1]

[1] GCBA. Secretaría de Educación. Dirección de Currícula. Marco General del Pre Diseño Curricular para la Educación General Básica. 1999.

La propuesta

Capítulo 1: Parece distinto pero no lo es

Presentación del eje

El primer capitulo de *Leer, escribir y argumentar* para el alumno presenta actividades cuyo propósito es analizar la variedad de representaciones que se usan en matemática en relación con una misma noción. Al resolver problemas, podemos escribir un número de diferentes formas, usar unidades distintas para indicar una misma cantidad y, en geometría, podemos caracterizar una figura de más de una forma. También los gráficos ofrecen alternativas cuando se trata de comunicar información.

Las formas de representación en matemática son sumamente importantes, pues solo accedemos a los objetos que estudiamos a través de ellas y, a la vez, ellas mismas también se constituyen en objeto de estudio. Conocer las distintas expresiones que usa la matemática para representar una misma idea permite identificarla en distintos contextos, utilizarla para resolver problemas y, eventualmente, cambiar a otra representación si esto habilita procedimientos más económicos o permite comunicar la información más eficazmente.

Este aprendizaje requiere de un proceso a largo plazo, ya que primero se resuelven problemas que involucran un sentido particular de una noción en un contexto, con alguna representación también ligada a ese uso particular; luego se incluyen otros contextos con la misma representación o se presenta una nueva que resulte más adecuada y más tarde se amplía su uso a nuevos contextos, tanto extra como intramatemáticos. Comparar y analizar los distintos procedimientos y representaciones usadas para explicitar sus características y reglas de uso en cada registro permite avanzar así en el proceso de generalización de la noción.

Articular estas representaciones es parte de la construcción de cada concepto, avanzando desde la posibilidad de operar en cada registro con sus símbolos y reglas hacia la de pasar de un registro a otro. Por ejemplo, las primeras aproximaciones que realizan los alumnos al conjunto de los números racionales son a través del trabajo con fracciones y con expresiones decimales. En esta primera etapa, los chicos trabajan con estos registros en problemas distintos y no establecen relaciones entre ellos. Para un niño de 4° año/grado, podría no haber vinculación entre $\frac{3}{4}$ litros de leche y $ 0,75 y, menos aún, con 75%. Es más, muchos alumnos expresan longitudes en centímetros e interactúan con monedas de 10, 25 y 50 centavos sin darse cuenta de que se trata de centésimas partes.

En este momento, las expresiones fraccionarias y las decimales de los números racionales se encuentran todavía muy ligadas a los contextos de uso al registrar cantidades. A la vez, una misma representación puede estar aludiendo a situaciones distintas. Por ejemplo, el mismo $\frac{3}{4}$ que permite dar cuenta del resultado de una medición cuando se llena una jarra de 1 litro de capacidad hasta sus tres cuartas partes, puede expresar una constante de proporcionalidad cuando en una receta se indica utilizar 3 huevos por cada 4 kilos de harina.

Esta variedad de usos para las fracciones y las expresiones decimales se va abordando en un trabajo articulado durante todo el Segundo Ciclo, que incluye la elaboración y el análisis de procedimientos de cálculo para cada tipo de representación.

A su vez, y dados los diversos modos de expresión que presenta un número racional, es importante distinguir cuándo recurrimos a un registro y cuándo a otro, ya que cada una de estas formas de expresión tiene una pertinencia específica. Por ejemplo, si deseamos expresar la relación entre la cantidad de sobres de jugo par disolver en agua y la relación es un sobre por cada tres litros, la expresión $\frac{1}{3}$ resultará más conveniente que la expresión 0,333333… Si la relación (1 : 100 000 000) indica la escala de un mapa y debemos operar con ella, puede resultar más práctica la expresión 0,00000001.

Sin embargo, y aún pudiendo operar satisfactoriamente con fracciones y con decimales, la posibilidad de interpretar el número racional como cociente y de poder seleccionar la expresión que resulte más conveniente para operar en cada situación, depende de las relaciones que se hayan podido establecer entre las distintas representaciones.

Por otra parte, una de las características que distingue a la matemática como disciplina de conocimiento es su coherencia interna y, por lo tanto, las afirmaciones matemáticas no deben contradecirse entre sí. Por lo tanto, debe ser posible comprobar cómo el conocimiento comprometido permanece estable cuando lo que se afirma utilizando una forma de representación no entra en contradicción con lo que puede decirse al expresarlo en otro registro.

Un ejemplo de ello lo constituyen los algoritmos convencionales. ¿Qué relación existe entre los algoritmos con expresiones decimales y los que utilizamos con las fracciones? Si fracciones y decimales corresponden a un mismo número, debemos poder encontrar alguna relación que vincule un algoritmo con otro.

Por ejemplo, analicemos el caso de la multiplicación de números racionales.

Si multiplicamos dos expresiones decimales, podemos proceder del siguiente modo: en primer lugar multiplicamos sin tener en cuenta la coma y luego sumamos las posiciones decimales de los factores.

Para resolver el mismo producto utilizando fracciones: primero multiplicamos los numeradores y luego multiplicamos los denominadores.

¿Cómo se relacionan los algoritmos?

$$\begin{array}{rl}
1{,}25 & \longrightarrow \text{ 2 lugares} \\
\times\ 3{,}7 & \longrightarrow \text{ 1 lugar} \\
\hline
+\ 875 & \\
375 & \\
\hline
4{,}625 & \longrightarrow \text{ 3 lugares}
\end{array}$$

$$\frac{125}{100} \times \frac{37}{10} = \frac{4625}{1000}$$

$$\frac{\underset{\text{2 ceros}}{125} \times 37}{\underset{\text{2 ceros}}{100} \times \underset{\text{1 cero}}{10}} = \frac{4625}{\underset{\text{3 ceros}}{1000}}$$

Se multiplica sin considerar la coma decimal, porque esto equivale a comenzar multiplicando los numeradores, se cuentan las posiciones decimales y se suman, puesto que el producto de potencias de diez es un producto entre unidades seguidas por ceros.

Será la propiedad del producto de potencias de igual base la que sostendrá la argumentación:

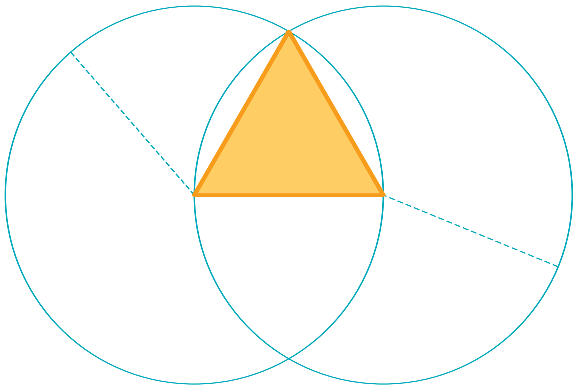
$10^2 \cdot 10^1 = 10^{(2+1)}$

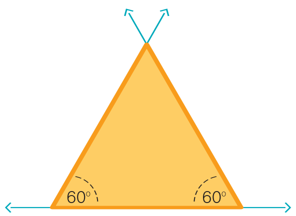
Es importante tener en cuenta que relacionar ambos algoritmos es mucho más que solo una verificación de uno u otro procedimiento, ya que la relación entre ambos expone las propiedades que los sustentan. Si desde la enseñanza no tomamos en cuenta estas relaciones, quedarían ocultas y no aportarían a la construcción de sentido de estos algoritmos.

No solo la aritmética presenta variedad de formas de expresar una idea. La geometría también lo hace, ya que podemos referir a una misma figura geométrica de modos diversos.

Un dibujo, un texto que enuncia una serie de propiedades, un instructivo para realizar una construcción, son distintos modos de representar una figura. A su vez, para una misma figura, es posible elegir diferentes dibujos, diferentes series de propiedades y diferentes instructivos. Reducir la variedad de expresiones limitaría su conceptualización.

Por ejemplo, podemos aludir a un mismo triángulo diciendo que es equilátero de 5 cm de lado o que tiene dos ángulos de 60° y un lado de 5 cm.





Para caracterizar la figura, en un caso se utiliza la congruencia de los tres lados y, en el otro, las medidas de dos ángulos y de un lado.

Al comparar las formas con las que es posible referir a la figura del ejemplo, vemos que se puede asegurar que se trata del mismo triángulo (sin recurrir a superponer los dibujos) explicitando las relaciones entre las propiedades de la figura: en todo triángulo se cumple que la congruencia de lados implica la congruencia de ángulos, en tanto que la congruencia de ángulos implica congruencia de lados. Saber que todo triángulo equilátero posee tres lados congruentes y que la tercera parte de 180º es 60º es suficiente entonces para afirmar que si el triángulo es equilátero, entonces será equiángulo.

En síntesis, establecer relaciones entre las distintas representaciones de los objetos matemáticos resulta central para su comprensión y, por ese motivo, es el eje que organiza las actividades del capítulo.

Presentación de los temas

En el primer capítulo se desarrollan cuatro temas que, a propósito de las distintas representaciones y su tratamiento, abordan contenidos vinculados a los números y las operaciones en los distintos conjuntos numéricos, a tratamiento de la información, a los sistemas de unidades de medida y a las propiedades de las figuras geométricas.

En la presentación se explicita el sentido de conocer las distintas formas de expresión que usa la matemática y luego, en *Acertijo* se invita a problematizar la tarea y poner en juego los conocimientos del grupo de alumnos.

En el primer tema, *¿Es el mismo número o es distinto?,* se trata de analizar las distintas formas en que es posible expresar un número racional, determinar criterios que permitan decidir si dos expresiones corresponden o no al mismo número y explicitar cómo se transforma una expresión en otra.

En el segundo tema, *¿Es la misma información o no?,* se consideran gráficos diferentes, para analizarlos y determinar si la información que aparece es o no la misma, abordando problemas que involucran cambios de escala y comparando la utilidad de distintos tipos de gráficos.

En *¿Es o no es la misma cantidad?* la discusión se centra en la comparación de cantidades de una misma magnitud expresadas con distintas unidades, lo que lleva a sistematizar relaciones entre unidades para un mismo sistema y entre sistemas recuperando, a la vez, los conocimientos sobre el sistema de numeración decimal.

En *¿Es o no es la misma figura?,* se consideran distintos conjuntos de datos para discutir si permiten construir figuras distintas o no, promoviendo la argumentación a través de la explicitación de propiedades. Asimismo, se pone en juego el uso de los instrumentos, poniendo en evidencia la vinculación de los procedimientos de construcción con las propiedades de las figuras que se construyen.

En *Para seguir pensando,* se plantea la recuperación de las preguntas que inician cada tema en relación con la existencia de diversas representaciones para una noción, poniendo de relieve la importancia de conocer esta variedad, y los modos que permiten pasar de una representación a otra, para tomar decisiones de manera más autónoma en la resolución de distintos tipos de problemas. También se plantea un nuevo problema acerca de los modos en los que se expresa la variación de una cantidad en función de la variación de otra. A la vez que se abren nuevas preguntas, se usan letras para designar cantidades, avanzando en el nivel de generalidad de las afirmaciones que se realizan.

Acertijo

En el desafío que se plantea en la página 9, parece haber una contradicción porque se reparte entre los hijos un camello menos que los de la herencia pero cada uno recibe más que tomando la parte que le corresponde del total heredado. Lo que permite entender este acertijo es que, en realidad, el padre nunca dejó su lote completo en la herencia. Como el mayor recibe la mitad del lote, el del medio recibe un tercio y el menor recibe un noveno, el padre deja $\frac{1}{18}$ del lote sin incluir en la herencia.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{9}{18}+\frac{6}{18}+\frac{2}{18}$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}$$

Luego, basta usar fracciones equivalentes para descubrir la ventaja de cambiar el denominador.

Si el lote estuviese constituido por 36 porciones, el padre sólo entregaría en herencia 34 de ellas. Pero esta mirada resulta forzada. Si bien es cierto que es posible pensar en porciones de herencia, no tiene sentido cortar camellos. Lo que implica que las razones de una proporción son ahora una interpretación más acorde del problema.

Por cada grupo de 18 camellos el padre sólo entrega en herencia 17 de ellos. Nueve al mayor, seis al del medio y dos al menor. Nuevamente, las expresiones equivalentes permiten apreciar esta proporción.

$$\frac{1}{2}=\frac{9}{18}$$
$$\frac{1}{3}=\frac{6}{18}$$
$$\frac{1}{9}=\frac{2}{18}$$

Este conocimiento del número racional es lo que le permite a Beremiz arriesgarse a entregar su camello. Con su animal, el lote pasaba a estar constituido por 36 camellos.

Dado que al resolver el acertijo los alumnos ponen en juego lo que saben sobre fracciones equivalentes, será necesario tener en cuenta si estos conocimientos están disponibles solo en un nivel de uso o pueden ser explicitados. Si los chicos no pueden argumentar sobre la equivalencia o no de distintas expresiones fraccionarias, será necesario entonces profundizar el trabajo con fracciones antes de iniciar el abordaje de las actividades que siguen.

Tema 1: ¿Es el mismo número o es distinto?

La enseñanza de los números racionales suele transitar al menos tres instancias: la enseñanza de las fracciones, la enseñanza de las expresiones decimales y la enseñaza de las proporciones.

Esta organización, si bien es un recorte que permite abordar paulatinamente la complejidad del campo, oculta el íntimo vínculo que existe entre cada una de los conocimientos involucrados. ¿Cuántos alumnos no ven en 25 %, $\frac{25}{100}$ y 0,25 tres expresiones de una misma cantidad? ¿Cuántos alumnos creen que $\frac{1}{4}$ es una cuenta no resuelta (división expresada) y que 0,25 es el resultado?

Estas y otras expresiones dan cuenta de la necesidad de articular estos conocimientos pues, de otro modo, se compromete la construcción misma de la noción de número racional.

En el problema 1.a de la página 10 se espera que los alumnos desplieguen diversas estrategias para comparar los valores numéricos. Algunas posibilidades son:

- Proceder con el algoritmo de la división para reconocer la expresión decimal a partir del número fraccionario.
- Obtener una fracción equivalente con denominador potencia de diez y luego escribir como expresión decimal: $\frac{3}{2}=\frac{15}{10}$, $\frac{3}{2}=1{,}5$.
- Escribir una expresión decimal como fracción y simplificar $1{,}5=\frac{15}{10}$, $\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$.

Para el problema 1.b., los procedimientos de la actividad anterior proporcionan estrategias para tomar decisiones acerca del orden de los números. En principio, los tres números se encuentran entre 2 y 3. Dado que $\frac{16}{8}$ es equivalente a 2, podemos afirmar que: $\frac{17}{8}=2\frac{1}{8}$.

Además, sabiendo que $1:8=0{,}125$, podemos afirmar que $\frac{17}{8}=2\frac{1}{8}=2{,}125$.

Otros alumnos podrán hacer la cuenta 17 : 8.

Como podemos notar, estas tres expresiones refieren a un mismo número y resulta $\frac{17}{8}=2\frac{1}{8}=2{,}125<2{,}15$.

Estas primeras actividades permiten recuperar los conocimientos de los alumnos sobre la equivalencia de distintas escrituras fraccionarias y decimales, y explicitar su vinculación.

En el problema 2, en la página 11, se invita a los chicos a revisar los algoritmos para multiplicar fracciones y expresiones decimales, y comprobar que dado que los números racionales presentan diversas formas de expresión, los algoritmos con los que operamos deben guardar la misma equivalencia. De modo análogo, es posible analizar los algoritmos de adición, sustracción y división, tarea que podría proponerse para investigar, asignando una operación a distintos grupos de alumnos.

El problema 4.a. en la página 12 requiere comparar las expresiones $\frac{1}{5}$ y 25% y, para hacerlo, los alumnos ya tendrían que haber trabajado con la noción de porcentaje. Será necesario, al menos, poder interpretar el 25% como 25 por cada 100, para escribirlo como $\frac{25}{100}$ y obtener una fracción decimal equivalente a $\frac{1}{5}$ ($\frac{2}{10} = \frac{20}{100}$), con el fin de comparar las escrituras o recurrir a la expresión 0,25 para el 25% y 0,2 para $\frac{1}{5}$. La puesta en común de los distintos procedimientos podrá dar lugar al registro de las distintas representaciones. En el caso en que en la clase apareciera una única forma de resolver, podremos presentar las otras formas para que los alumnos las consideren y evalúen su pertinencia. Asimismo, habrá que discutir cómo afecta al precio final el descuento de $20 por el día de la madre, y qué porcentaje representa de distintas cantidades para terminar de decidir si conviene o no la tarjeta.

El problema 4.b. demanda reconocer que los descuentos parciales equivalen al descuento total, lo que requiere el uso de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición.

20/100 x (\$A + \$B + \$C + \$D + \$D + \$E) =
= 20/100 x \$A + 20/100 x \$B + 20/100 x \$C + 20/100 x \$D + 20/100 x \$E

Cabe aclarar aquí que no se espera que los alumnos espontáneamente utilicen letras para designar precios cualesquiera. Tal vez los chicos utilicen algunos ejemplos de precios “redondos” para explorar la validez del procedimiento del comerciante, y luego se podrá preguntar a la clase si esta forma de calcular vale para cualquier variedad de precios, lo que podría dar lugar a una escritura provisoria como la siguiente:

20% del 1º artículo + 20% del 2º artículo + 20% del 3º artículo + 20% del 4º artículo + 20% del 5º artículo = 20% de (1º artículo + 2º artículo + 3º artículo + 4º artículo + 5º artículo).

El segundo ítem demanda un trabajo con el complemento, ya que si se descuenta el 20 %, se abona el 80 % del costo del artículo.

$x - 20\%\, x = x \cdot (1 - 20/100) = x \cdot (80/100) = 80\%\, x$

La equivalencia de las expresiones anteriores se asegura por la propiedad conmutativa de la multiplicación y por reconocer a *x* como factor común, recuperando el trabajo realizado con la propiedad distributiva.

El momento de la puesta en común es oportuno para recuperar el uso de las propiedades de la multiplicación y la equivalencia entre calcular los 8/10 de una cantidad, multiplicar por 0,8 y multiplicar esa cantidad por 8 y dividirla por 10, explicitando también que multiplicar por 1/10 es equivalente a dividir por 10.

Por ejemplo, para 80 % de \$120, pueden admitirse distintas formas de escribir y realizar el cálculo:

$$\frac{80}{100} \times 120 = 80 \times \frac{1}{100} \times 120 = 96$$

$$80 \div 100 = 0{,}8 \qquad 120 \times 0{,}8 = 96$$

Hacia el final del presente tema, se proponen reflexiones más generales para generar criterios que puedan ser utilizados en nuevas situaciones.

En la página 13, se propone analizar la validez de afirmaciones que explicitan posibles criterios de comparación de racionales. Se promoverá el uso de argumentos como: ***Si una fracción tiene numerador menor que el denominador, la expresión decimal tiene que ser cero coma algo, porque si hacemos la cuenta el divisor no entra en el dividendo y hay que bajar decimales.*** Así, se podría arribar a que todas las divisiones donde el dividendo es menor que el divisor, y que reproducen el caso de las fracciones cuyo numerador es menor al denominador, son menores que 1, fortaleciendo así la idea de que el cociente entre dos números naturales define un número racional positivo.

Finalmente, se introduce la problemática de las expresiones decimales periódicas, lo que habilitará en la clase cuestionar el alcance de algunas afirmaciones que suelen realizar los alumnos: ***Siempre es más fácil operar con números con coma que con fracciones. ¿Para qué complicarse la vida con las fracciones? Pasá todo a decimales y operá con decimales, total da lo mismo.***

El texto en el recuadro final permitirá juzgar cuándo a una fracción le corresponderá una expresión decimal (la división alcanzará resto cero en algún paso) y cuándo la expresión decimal resultará periódica (la división jamás alcanzará un resto cero y se repetirán los restos y las cifras del cociente mientras se continúe dividiendo).

Tema 2: ¿Es la misma información o no?

Los gráficos cartesianos y de sectores permiten presentar información organizada para destacar lo que se desea comunicar. Es por eso que para su interpretación resulta clave analizar cada uno de sus componentes y establecer relaciones con los datos. Así los problemas 1 y 2, en las páginas 14 y 15, solo presentan un cambio de escala.

En el problema 1, se pasó de una escala en la que cada unidad refiere a 1000 clientes, a otra en la que cada unidad representa 400 clientes que, si no se advierte, podría dar lugar a pensar que el departamento de Ventas registra más clientes que el de Distribución.

En el problema 2, la escala no está explicitada. La observación detallada del gráfico, junto a la lectura del texto, llevará a los alumnos a descubrir las escalas empleadas. Nuevamente, se presenta solo un aparente cambio de información, ya que ambos gráficos representan la misma evolución con las mismas mediciones parciales. Solo cambió la forma de presentar la información.

En el caso de la página 16 las diferencias entre uno y otro gráfico son sustanciales. El gráfico de barras proporciona información expresada en cantidad de usuarios, mientras que el segundo gráfico lo hace en términos de porcentaje y permite establecer relaciones con el total. Por ejemplo, aunque no se conozca la cantidad exacta de usuarios para cada tipo de acceso a Internet, se observa que los usuarios por conexión *free* y banda ancha superan en poco la tercera parte, en tanto que por *dial up* hay menos de un cuarto.

Para validar la afirmación no es suficiente con observar el gráfico y advertir que presenta un cambio de forma. Habrá que averiguar el total de usuarios, información que proporciona el gráfico de barras. Luego, habrá que calcular los porcentajes sobre ese total para contrastar con los valores del gráfico de barras, calcular qué porcentaje representa el total de usuarios *free* del total, qué porcentaje es el que le corresponde a los usuarios de banda ancha y cuál al del servicio *dial up*.

La diferencia entre ambos gráficos no radica exclusivamente en la forma, sino que también difieren las expresiones numéricas: en un caso son cantidades parciales y en otro, la razón entre cada cantidad parcial y el total.

En *Reflexiones*, como cierre del tema, se propone analizar los distintos tipos de gráficos. Explicitar la diferencia entre mostrar la evolución de un proceso o facilitar las comparaciones entre las partes y el total permitirá determinar, por ejemplo, la pertinencia de usar un gráfico de barras o uno de sectores.

Tema 3: ¿Es o no es la misma cantidad?

En este tema se propone un recorrido por las diversas formas en que se puede expresar una misma medida, explicitando la estrecha dependencia que existe entre la unidad que se elige y el número que se obtiene al efectuar una medición o calcular. Asimismo, se busca poner en evidencia las relaciones entre unidades de un mismo sistema y las diferencias entre distintos sistemas.

Para algunas comparaciones entre cantidades, puede resultar suficiente concentrarse en el análisis de la unidad de medida, como cuando comparamos 2 km con 8 cm. En este caso, la comparación entre 2 y 8 resulta innecesaria, dado que las unidades empleadas tornan irrelevante el análisis. Pero si las longitudes que comparamos son 2 km y 200.000,1 cm, entonces importa comparar 2 y 200.000,1, porque ahora la diferencia es de apenas 1 mm.

Estos conceptos se ponen en juego al resolver los problemas de las páginas 18 y 19 en los que se analizan aparentes cambios debidos a la combinación de distintos valores numéricos y distintas unidades.

El problema 1 de la página 20 demanda calcular el volumen de un piletón. Para ello, contamos con las dimensiones y obtendremos un volumen de 1200 m^3. Ahora es necesario buscar una expresión que facilite el cálculo de la capacidad. El decímetro cúbico es tal vez la unidad más conveniente, dado que cada dm^3 equivale a 1 litro.

La capacidad del piletón será de 1.200.000 litros, dado que 1200 m^3 equivalen a 12.000.000 dm^3. Si las bocas vierten 1200 litros por minuto, tardará 1000 minutos en llenarse. El problema se reduce ahora a calcular el total de horas o el total de días contenidos en ese lapso de tiempo. Como podemos observar, hemos cambiado las formas de expresar la medida para una misma magnitud: 1200 m^3 = 1.200.000 dm^3, como así también hemos canjeado unidades de medida de distintas magnitudes: 1.200.000 dm^3 = 1.200.000 litros y hemos utilizado el sistema decimal y el sexagesimal.

En el problema de la página 20, salvo en el caso de los cloruros de sodio calcio y magnesio y de fluoruro de calcio de “El Manantial”, las concentraciones de minerales son las mismas. Al comparar 350 mg/l y 0,35 g/dm^3 se puede notar que los valores numéricos se ven reducidos a su milésima parte, pero la situación es compensada por la relación entre las unidades de medida miligramo y gramo. Como cada litro ocupa 1 dm^3, es equivalente usar una denominación u otra.

Los problemas de la página 21 permiten tomar contacto con otras unidades de medida utilizadas por otras sociedades y avanzar en el análisis de las relaciones entre la medida y la unidad. En el problema 3, es probable que muchos alumnos hagan los cálculos para expresar las cantidades en la misma unidad y así poder compararlas, utilizando las equivalencias entre unidades y propiedades de las relaciones de proporcionalidad directa. Sin embargo, esto no es necesario ya que basta descubrir que si una unidad es menor que otra, la medida que se obtiene con la primera unidad es mayor que la segunda, conclusión a la que se espera arribar al discutir el punto c. Es más, en el sistema decimal es fácil advertir que si la unidad se reduce a la centésima parte, la medida aumenta 100 veces, evidenciando una relación de proporcionalidad inversa.

Mediante el problema 4 es posible revisar la noción de error como algo inherente al acto de medir. Medir no es un procedimiento exacto, siempre involucra error debido tanto al instrumento como al observador. Así, solo es posible encuadrar el resultado de una medición entre dos valores que dependen de la graduación del instrumento usado y, cuando la unidad del instrumento que se usa es menor, su precisión aumenta.

En *Reflexiones,* se busca generalizar las relaciones establecidas para la longitud a otras magnitudes, explicitando la relación entre unidades y medidas. Esta también resulta una buena oportunidad para volver sobre la estructura decimal del SIMELA y recuperar algunas cuestiones que dan cuenta del carácter sociohistórico de los conocimientos. Muchas veces, los alumnos y alumnas conservan una mirada ingenua sobre el origen y el uso de las unidades convencionales de medida, cuando en realidad su evolución da cuenta de avances científicos situados en procesos históricos más amplios y complejos.

Tema 4: ¿Es o no es la mIsma figura?

Como quedó expresado antes, las diferentes formas de expresión también alcanzan a las figuras geométricas. En este sentido, vale la pena destacar que los dibujos siempre resultan un representación particular. Así, al dibujar un triángulo cualquiera, este resultará necesariamente de algún tipo (acutángulo, isósceles, etc.) y tendrá algunas medidas particulares. Avanzar en la caracterización de cada una de las clases de figuras por un conjunto cada vez más amplio de propiedades requerirá independizarse progresivamente de las características particulares que se ven o se miden en los dibujos que usamos para representarlas.

Al resolver las actividades, los chicos podrán construir la misma figura a partir de diferentes descripciones y también podrán diseñar distintos instructivos para construir la misma figura, como se plantea en los problemas de la página 22, lo que permite poner en juego distintas propiedades y establecer relaciones entre una representación y otra.

La diversidad no solo abarca las instrucciones que permiten construir una figura, también debe alcanzar las instancias argumentativas. Así, los argumentos usados para justificar el resultado de un procedimiento de construcción también pueden resultar diversos y esa diversidad comprometerá diferentes propiedades de una misma figura o distintos modos de interactuar con la misma figura.

El problema 3 de las páginas 23 y 24 propone otro tipo de tarea a los alumnos y alumnas, ya que se trata de analizar procedimientos para determinar si, efectivamente, lo que se obtiene al realizar la construcción es o no el dibujo que se espera. Para ello, se seleccionó la construcción de un hexágono regular, dado que esta figura presenta múltiples posibilidades de abordaje a través del uso de distintos instrumentos.

El análisis de las diversas construcciones llevará a la discusión acerca de porqué cada una de ellas es válida. Aunque es posible que algunos chicos intenten medir lados y ángulos para verificar si son o no congruentes, es importante promover la explicitación de las propiedades que sustentan los diferentes procedimientos de construcción para ir avanzando en el tipo de argumentación. Tal como se señala en los NAP, se trata de ofrecer *situaciones de enseñanza que promuevan en los alumnos y alumnas la producción y validación de conjeturas sobre relaciones y propiedades geométricas, avanzando desde las argumentaciones empíricas hacia otras más generales.*

En *Reflexiones*, se busca generar una instancia reflexiva que habilite el reconocimiento y la sistematización de las propiedades abordadas, pudiendo establecer relaciones entre las distintas formas de describir una figura. Este también es un buen momento para volver sobre el uso de distintos instrumentos y, en particular, sobre el del compás.

Para seguir pensando

Esta sección de la página 26, bajo el título *¿Por qué parece distinto pero no lo es?,* invita a volver sobre el tema de los cambios recuperando las reflexiones realizadas al interior de cada uno de los temas del capítulo. Su lectura podrá hacerse primero en forma individual, abriendo luego una ronda de comentarios y recuperando, al mismo tiempo, escenas vividas por el grupo al realizar las distintas actividades.

Si los temas se hubieran desarrollado en un orden distinto al que se presenta en el cuaderno o se hubieran intercalado otras secuencias de actividades en su desarrollo, convendría recuperar oralmente el proceso, revisar el libro para el alumno o los registros realizados en las carpetas de los alumnos, antes de leer esta página.

A la vez que interesa hacer un cierre, se busca también generar nuevas preguntas que anticipen otros problemas en otros contextos. En particular, se propone avanzar en un análisis de orden más general, dando lugar al uso de las letras como variables.

En la página 27 bajo el título *Dos fórmulas distintas también pueden ser equivalentes,* el problema 1 requiere determinar el número de figuras geométricas que componen una guarda, en función de la cantidad de azulejos que la componen. Para ello, luego de explorar algunos casos particulares, se propone un salto hacia la generalidad. El análisis de las distintas escrituras posibles permitirá concluir que las fórmulas también se pueden expresar de modos diversos. Es probable que para determinar la equivalencia de las expresiones los alumnos verifiquen si se obtienen o no los mismos resultados. Al finalizar el capítulo 2, se volverá sobre este problema para transformar una expresión en otra usando las propiedades de las operaciones. Poder determinar la equivalencia de las expresiones también requiere interpretar algunos códigos de escritura, como por ejemplo $6 \cdot n$ en lugar del conocido $6 \times n$.

En el problema 2, se recuperan las fórmulas conocidas de perímetro y área para explorar distintas formas de escribirlas, lo que permite analizarlas desde una perspectiva distinta.

El trabajo con variables que recién se inicia será uno de los desafíos más importantes que encararán los alumnos y alumnas al seguir estudiando y, en ese sentido, resulta vital anticipar este tipo de trabajo.

Capítulo 2: Parece que vale siempre, pero no

Presentación del eje

En este segundo capítulo, el propósito de las actividades es analizar el campo de validez de distintas afirmaciones discutiendo si es posible utilizar las propiedades conocidas en situaciones nuevas o analizando cómo varían las relaciones entre distintas cantidades.

Cuando se quiere estudiar una determinada situación desde la matemática, se formulan preguntas y, para responderlas, se utilizan modelos matemáticos conocidos o se elaboran conjeturas y se producen nuevos modelos. En todos los casos, las conclusiones que se elaboran se interpretan para determinar si responden o no a las preguntas planteadas inicialmente. También forma parte de este proceso mejorar la eficacia de los modelos que se crean y de las formas de comunicar los descubrimientos, como también establecer relaciones entre lo nuevo y lo que ya se conoce.

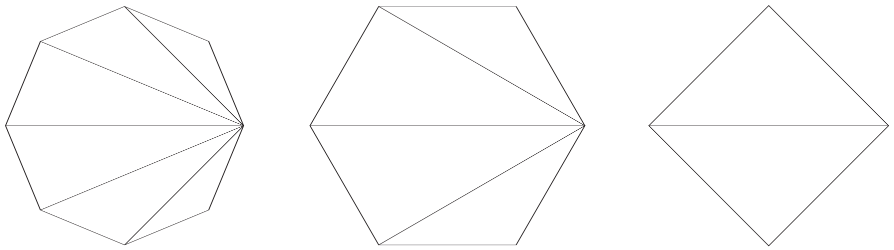
En este año/grado, es importante que los alumnos analicen el nivel de generalidad que tienen las respuestas a los problemas que resuelven y que descubran y expliciten que algunas afirmaciones son verdaderas en un campo numérico, para una operación o para un conjunto de figuras, pero no lo son para otros. Por ejemplo, siempre que se opera con números naturales, el producto de una multiplicación es mayor que cualquiera de sus factores, pero esto no es cierto si los factores son números racionales menores que 1. Otro ejemplo, relativo a las propiedades de las operaciones, es el de la propiedad distributiva: la multiplicación es distributiva con respecto a la suma y a la resta, pero la potenciación no lo es.

$$(5 + 6) \times 2 = (5 \times 2) + (6 \times 2) = 10 + 12 \qquad (5 + 6)^2 \neq 5^2 + 6^2$$

En el caso de los problemas que refieren a relaciones entre cantidades, es frecuente que los alumnos consideren que si *cuando aumenta una cantidad aumenta la otra,* pueden usar el modelo de la proporcionalidad directa cuando no siempre es así. Es más, se descuenta que muchas relaciones son de proporcionalidad directa, cuando en realidad esto solo vale para un conjunto de valores y no para otros. Por ejemplo, podemos calcular cuánto costarán 4 kg de carne duplicando el precio del costo de 2 kg, pero es probable que el cociente peso/precio no se mantenga constante para más de 10 o 20 kg.

En geometría, por ejemplo, si sabemos que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° y la suma de sus ángulos exteriores es 360°, podríamos pensar que esos valores se pueden generalizar para otros polígonos. Al considerar el caso de los cuadriláteros convexos, la suma de los ángulos exteriores sigue siendo válida, pues la suma de los giros en cada vértice es una vuelta completa. En cambio, la suma de los ángulos interiores es de 360°.

Para la suma de los ángulos interiores, podemos afirmar que, en general, vale que la suma de los ángulos interiores sea igual a 180° (n – 2), donde n es el número de lados, puesto que se puede dividir cada polígono en n – 2 triángulos.



Y para la suma de los ángulos exteriores, ¿es suficiente comprobar que vale para los triángulos y los cuadriláteros, para generalizarla a todos los polígonos convexos? Podemos asegurarlo razonando del siguiente modo:

En cada vértice, la suma del ángulo interior más el exterior es 180°. Como para todos los vértices ocurre lo mismo, tendremos tantas sumas como vértices y, en total, 180° x n. Dado que este valor corresponde a la suma de los ángulos exteriores más los interiores, si restamos a esta cantidad la suma de los ángulos interiores, tendremos la suma de los exteriores.

$$180° \times n - 180° \times (n - 2) = 180° \times n - 180° \times n + 180° \times 2 = 180° \times 2 = 360°$$

Es importante destacar entonces que es parte del trabajo matemático tratar de usar lo conocido para resolver problemas nuevos. Sin embargo, es necesario verificar que las propiedades siguen siendo válidas, pues a veces las generalizaciones funcionan y otras veces no. Centrarnos en un trabajo de este tipo permite, retomando los NAP, que las alumnas y los alumnos *produzcan e interpreten conjeturas y afirmaciones de carácter general y analicen su campo de validez, avanzando desde argumentaciones empíricas hacia otras más generales.* A la vez, *defienden sus propios puntos de vista, consideran ideas de otros para debatirlas y elaborar conclusiones aceptando que los errores son propios de todo proceso de aprendizaje.*

Presentación de los temas

En las actividades de los cuatro temas del capítulo 2 se abordan contenidos vinculados a las propiedades de los números y de las operaciones en los distintos conjuntos numéricos, a las relaciones entre cantidades, a las variaciones de áreas y perímetros, y a las propiedades de las figuras geométricas.

En la presentación, se explicita el sentido de discutir algunas de las ideas que suelen generalizarse sin asegurarse de su validez e incorporar esta práctica como parte del trabajo matemático. Luego, *Acertijo* invita a problematizar la tarea y poner en juego los conocimientos del grupo de alumnos.

En el primer tema, *Si cambian los números, ¿valen las mismas propiedades?* se trata de preguntarse por la validez en el campo de los número racionales (fracciones y decimales) de algunas afirmaciones que los alumnos conocen como ciertas para los números naturales.

En el segundo tema, *En las relaciones entre cantidades, ¿cuándo vale la proporcionalidad?*, se trata de discutir que si consideramos dos cantidades que están relacionadas de manera tal que cuando aumenta una, entonces aumenta la otra, no siempre valen las propiedades de la proporcionalidad. Asimismo, se analiza para qué valores es posible considerar la relación y, en consecuencia, cómo se representa en los ejes cartesianos.

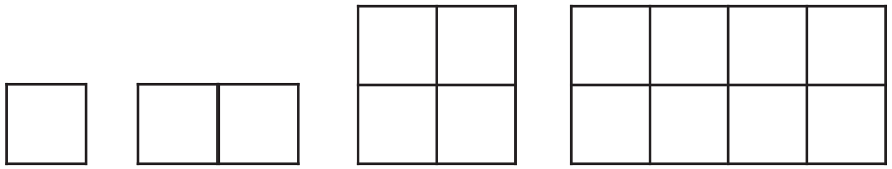
En *Propiedades geométricas, ¿para qué figuras valen?,* la idea es comparar figuras que tienen algunas propiedades en común, descubrir que no necesariamente van a compartir otras y analizar diferencias entre clases de figuras.

En el cuarto tema, *Áreas y perímetros de figuras, ¿qué cambios valen y cuáles no?* se consideran los cambios en una figura con determinada área y determinado perímetro. Dado que puede ocurrir que cambie el perímetro pero que no cambie el área, o que cambien de diferente forma, se retoma el análisis de variaciones realizado en el segundo apartado.

En *Para seguir pensando,* se plantea la recuperación de lo trabajado en los apartados anteriores en relación con la necesidad de revisar la validez de las afirmaciones que se hacen frente a situaciones nuevas. Se retoma luego el problema resuelto al finalizar el capítulo 1, para analizar las fórmulas y dar razones sobre su equivalencia.

Acertijo

La resolución del desafío planteado en la página 29 requiere considerar que cada día se duplica el valor del día anterior y, por lo tanto, si la habitación con una planta se cubre totalmente el día 10, el día 9 se cubrirá la mitad. La otra habitación estará cubierta el día 9, pues cada planta habrá cubierto la mitad del total. Seguramente, los chicos intentarán generalizar la idea de variación proporcional inversa, pensando que el doble de plantas llenará la habitación en la mitad del tiempo. Hacer algún esquema tal vez ayude a terminar de comprender que cada día la superficie ocupada por la planta es el doble de la del día anterior.



Primer día Segundo día Tercer día Cuarto día

Este crecimiento se representa luego en un par de ejes cartesianos, en la plaqueta de *Reflexiones* de la página 49, cuando se comparan distintas formas de variación no proporcional.

Es frecuente que los alumnos rápidamente afirmen que ***si aumentan las dos cantidades, es directa*** o ***si aumenta una cantidad y disminuye la otra, es inversa***, sin analizar si el cociente o el producto entre los valores que se corresponden es constante. Esto se debe, muchas veces, a que cuando se enseña el tema no se contrastan las variaciones proporcionales con otras que no lo son.

La discusión permitirá poner en evidencia los conocimientos de los alumnos sobre proporcionalidad y sus modos de argumentar. Estos conocimientos serán puestos nuevamente a prueba al abordar las actividades de los temas 3 y 4.

Tema 1: Si cambian los números, ¿valen las mismas propiedades?

En Aritmética, es importante tener en cuenta con qué tipos de números estamos trabajando ya que, dependiendo de ello, la solución de los problemas que tenemos que resolver podría ser muy distinta. Por ejemplo, la ecuación $2 \cdot x = 7$ no tiene solución en el conjunto de los números naturales y sí en el de los racionales.

Para abordar la reflexión acerca de "lo que vale o no vale", se presentan distintas discusiones entre chicos y chicas para que los alumnos decidan quién tiene razón y por qué.

En la página 30, los diálogos entre los compañeros se refieren a criterios de comparación de números decimales y de fracciones, que recuperan las generalizaciones que hacen muchos alumnos.

En el problema 1, los criterios que se discuten están ligados a las respectivas representaciones. Efectivamente, cuando los números están expresados en sistema decimal, en los naturales, el número es mayor cuando tiene más cifras. En tanto que en los racionales, cuando están expresados en forma decimal, al tener más cifras, puede ocurrir que el número sea mayor ($0,812 > 0,81$) o igual ($0,7 = 0,70$) o también menor ($0,125 < 0,2$).

Si los racionales están expresados en forma de fracción, el número será mayor si, para el mismo denominador es mayor el numerador ($\frac{3}{5} > \frac{2}{5}$), pero será menor si, para el mismo numerador, tiene un denominador mayor ($\frac{2}{4} < \frac{2}{5}$).

En la página 31, los diálogos se refieren a la noción de sucesor. En los números naturales, cada número tiene un siguiente y un anterior. Pero en los números racionales no es posible hablar de sucesor, pues siempre ocurre que entre un racional y cualquier otro número que pensemos, aún cuando esté "cerca" del anterior, es posible encontrar otro racional. Sin embargo, los alumnos suelen pensar que es posible encontrar un sucesor si lo buscan muy cercano.

Por ejemplo, si pensamos en la fracción $\frac{3}{8}$ y pensamos en una "cercana", como $\frac{4}{8}$, entre ellas está $\frac{7}{16}$, $\frac{13}{32}$, $\frac{14}{32}$, $\frac{15}{32}$ y una infinidad más de racionales. Lo mismo ocurre cuando pensamos en el decimal 1,5 y 1,6, entre ellos están 1,51; 1,511; 1,518; 1,52 y una infinidad más. En este caso, el tipo de representación ayuda a generar múltiples ejemplos fácilmente. Por estas razones, decimos que los números naturales forman un conjunto discreto y los racionales un conjunto denso. Esta es una propiedad difícil de comprender para los alumnos ya que no es para nada intuitiva, sin embargo es posible descubrir que entre un racional y otro, siempre se pueden encontrar tantos números racionales como se desee.

En la página 32, se toman dos cuestiones. Una es la generalización de las relaciones de orden entre los números que intervienen en los cálculos de multiplicar y dividir. Es importante discutir estas generalizaciones, pues suelen ser utilizadas por los alumnos, a veces de manera implícita, al realizar cálculos aproximados y al controlar los resultados de sus cálculos exactos.

En los números naturales, cada uno de los factores es menor que el producto, pero en los racionales esto no siempre ocurre. Si ambos factores son mayores que 1, el producto es mayor que cada uno de ellos ($2,5 \times 1,2 = 3$, $3 > 2,5$ y $3 > 1,2$), pero si uno de los factores es menor que 1, entonces el producto es menor que el otro factor ($2,5 \times 0,2 = 0,5$ y $0,5 < 2,5$).

Al dividir dos naturales, el dividendo es mayor que el cociente. Al tomar un número racional como dividendo, si el divisor es mayor que 1, el cociente será menor que el dividendo (22,5 : 2,5 = 9 y 9 < 22,5), pero si el divisor es menor que 1, ocurre lo contrario (22,5 : 0,5 = 45 y 45 > 22,5).

La otra cuestión, en la página 32, es la relación de la división con las nociones de múltiplo y divisor. Al dividir dos números naturales es posible tener resto 0 o no, en el primer caso, hablamos de división exacta y, en el segundo de división entera.

Cuando la división es exacta, como en 45 : 9 = 5 o 45 : 5 = 9, podemos decir que 5 y 9 son divisores de 45, pues las divisiones tienen resto 0. También podemos pensar en la operación inversa 5 x 9 = 45 y decir que 45 es múltiplo de 5 y de 9. Estas nociones permiten agrupar los números naturales en clases de números, como los pares e impares (son múltiplos de 2 y no son múltiplos de 2), los múltiplos de 3, etcétera.

También es posible considerar los criterios de divisibilidad, es decir las formas de detectar si las divisiones dan resto 0 sin hacer la cuenta de dividir.

En el caso de, por ejemplo, 15 : 2 se puede encontrar un número que multiplicado por el divisor dé 15 (7,5 x 2 = 15) pero como ese número no es natural no podemos decir que 15 es múltiplo de 2.

Es posible que estas actividades presenten alguna dificultad a los alumnos que no están acostumbrados a sostener debates, en ese caso tal vez convenga que primero trabajen en forma individual para luego comparar sus respuestas en pequeños grupos y finalmente, hacer una puesta en común con toda la clase.

En el apartado *Reflexiones*, en la página 33, se propone que los alumnos encuentren la respuesta a las preguntas planteadas al inicio. Para ello, se invita a realizar una síntesis de lo trabajado en el eje mediante tres actividades que retoman las ideas trabajadas, pidiendo ejemplos y elaboración de argumentos. También se vuelve sobre el tema de las representaciones sugiriendo el uso de la recta numérica.

Tema 2: En las relaciones entre cantidades, ¿cuándo vale la proporcionalidad?

Tal como señalábamos al presentar el acertijo de este capítulo, muchos alumnos y alumnas tienden a generalizar el uso del modelo de la proporcionalidad directa a cualquier correspondencia entre cantidades en la que se registren aumentos. Para cuestionar estas ideas, presentamos varios casos que muestran ligeras diferencias y llevan a analizarlos con detenimiento.

En la página 34, el diálogo toma la cuestión de la representación de la relación de proporcionalidad en ejes cartesianos, que suele generalizarse como *una recta que pasa por el origen*. La discusión plantea cuándo una relación de proporcionalidad se puede representar mediante una recta continua y cuándo mediante puntos. Esto tiene que ver con los valores que toma cada una de las magnitudes representadas. Si las magnitudes son discretas, como con el número de ruedas y el número de triciclos, se trata de números naturales y entonces sólo puede haber puntos. Si las magnitudes son continuas y toman valores naturales o racionales, entonces podemos dibujar rectas. Esto último se admite hasta que los alumnos conocen otros campos numéricos además de los racionales, pues en verdad con los racionales no están cubiertos todos los valores posibles.

En la página 35, se continúa con el análisis precisando para qué valores es posible considerar la relación y, en consecuencia, cómo se representa en los ejes cartesianos. Para las relaciones entre artículos y sus precios, si son alfajores, entonces la representación de la relación será con puntos y si son metros de tela, será una recta que pasa por el origen. El análisis de los valores que cumplen la relación permite diferenciar también que sólo una de las dos rectas tiene la inclinación que corresponde, pues se encuentran sobre ella pares de valores de la tabla.

En el problema 3, la idea es discutir si los pares de valores responden a una relación que puede aproximarse a una de proporcionalidad para hacer estimaciones. Aunque hay ligeras diferencias, es posible estimar los valores correspondientes a 40, 45 y 90 metros. Para responder, es importante considerar que el atleta se entrena para los 100 metros y es posible estimar cuánto tarda en recorrer 120 metros usando el gráfico, pero es poco probable que su velocidad sea la misma para 200 metros. Unir los puntos sería equivalente a considerar que tiene velocidad constante de 10 m/seg.

En las páginas 36 y 37, los problemas 4 a 7 brindan la oportunidad de comparar distintos modos de variación y de discutir sobre la caracterización de las relaciones de proporcionalidad directa. Tal como señalamos antes, observar que *al aumentar una de las cantidades aumenta la otra* no es suficiente para afirmar que la relación es de proporcionalidad. Para hacerlo, es necesario incluir otras propiedades, en este caso la existencia de una constante de proporcionalidad para todos los pares de valores. En este ejemplo, se trata de hacer una comparación con una relación lineal no proporcional.

En la página 37, se trata de comparar dos relaciones determinando si se verifica que al doble de una cantidad le corresponde el doble de la otra. Al analizar los puntos c y d del problema 5 es importante destacar que, para valores enteros, un recorrido del doble de km que otro cuesta el doble, pero esto no puede afirmarse para dos valores cualesquiera: un viaje de 1,5 km cuesta $2 y uno de 3 km cuesta $6. Además, un viaje de 2,5 km cuesta $4, uno de 1,8 km cuesta $2 y 2,5 no es el doble de 1,8. Este es un ejemplo interesante, pues pareciera que la relación es de proporcionalidad directa, ya que sus propiedades se verifican para algunos valores. Esto también se problematiza al analizar la validez del procedimiento de “regla de tres” para cada una de las relaciones, y que solo es adecuado para algunos valores particulares pero no lo es en general.

En la página 38, se presentan nuevos problemas para comparar diferentes crecimientos, en los que hay que analizar con detenimiento los intervalos de tiempo para decidir qué locutorio resulta más barato. En el punto c del problema 9.b., se muestra un crecimiento exponencial el analizado en el acertijo inicial.

Las actividades propuestas en *Reflexiones*, en la página 40, vuelven sobre las pre-guntas planteadas al iniciar el tema para sistematizar las propiedades de las relaciones de proporcionalidad directa y las características de sus representaciones en un sistema de ejes. La invitación a escribir un texto de síntesis promueve algunas prácticas de estudio que también deben fortalecerse en este año/grado.

Tema 3: Propiedades geométricas, ¿para qué figuras valen?

Las figuras geométricas que comparten una propiedad pueden ser agrupadas por esa propiedad común. Es lo que pasa, por ejemplo, con todas las figuras que tienen dos pares de lados paralelos, todos ellos son paralelogramos.

Ahora bien, dentro de esta clase de figuras, es posible analizar otras propiedades, por ejemplo, tener lados congruentes. En este caso, podemos formar una subclase en la que están los rombos y los cuadrados pero no están los rectángulos.

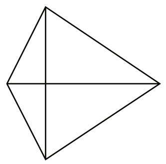
Poder precisar qué propiedades caracterizan a cada figura y cuáles las diferencian de otras requiere problematizar los conocimientos que se han construido sobre casos particulares, en particular sobre los dibujos, en un trabajo de generalización y establecimiento progresivo de relaciones.

Adquirir el concepto de paralelogramo demandará identificar lados opuestos paralelos y congruentes, ángulos opuestos congruentes, ángulos consecutivos suplementarios, diagonales que se cortan en su punto medio, etc. Es el conjunto de propiedades el que da entidad a la figura paralelogramo, y no una cierta forma asociada a un dibujo particular. A su vez, las figuras geométricas, concebidas ya como generalidades, se organizarán nuevamente bajo ciertos criterios. Es así que todo cuadrado es rombo, todo cuadrado es rectángulo, pero solo algunos rectángulos son cuadrados y algunos rombos son cuadrados. Si se conoce una propiedad para el rectángulo, esta será necesariamente válida para el cuadrado, pero el argumento no se puede sostener en sentido contrario. Así como resulta verdadero que todo rectángulo posee diagonales congruentes y es innecesario demostrarlo para el cuadrado, que el cuadrado posea diagonales perpendiculares no implica que el rectángulo las tenga.

Ya en el último año de Primaria/inicio de Secundaria los alumnos y las alumnas conocen cierto repertorio de propiedades que pueden identificar en distintas figuras, pero es probable que tengan alguna dificultad para distinguir clases, para establecer relaciones jerárquicas entre ellas o para, dada una propiedad, identificar qué figuras la cumplen.

Este último desafío es el que se presenta en el problema de la página 40, ya que si las diagonales son congruentes, la figura podría ser un cuadrado, un rectángulo, un trapecio o un romboide o si son perpendiculares puede tratarse de un cuadrado, un rombo, un romboide; un trapecio y si se dan ambas propiedades, puede ser un cuadrado, un romboide o un trapecio, ya que no se precisa dónde se cortan las diagonales.

Es posible que, para apoyar sus argumentaciones los chicos realicen algunos esquemas o figuras de análisis. En el intercambio será importante el uso de los contraejemplos para argumentar. Por ejemplo, *no es cierto que todos los romboides tiene una diagonal más larga, en este son iguales.*



El problema 2, en la página 41, da lugar al uso de propiedades conocidas para argumentar sobre las propiedades de figuras nuevas y presenta algunas relaciones entre congruencia de lados y congruencia de ángulos que pueden resultar nuevas para los chicos.

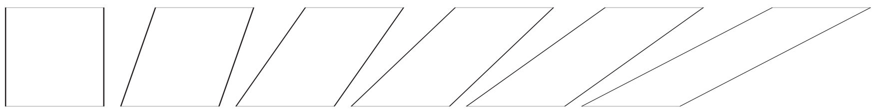
En los problemas de construcción de la página 42, es necesario discutir la cantidad de soluciones posibles, para definir luego cuáles son los datos que garantizan la unicidad de la construcción que se obtiene con ellos. El problema 6 de la página 43 propone elaborar y analizar afirmaciones para determinar su validez, volviendo sobre las mismas figuras pero con otro tipo de tarea. Los puntos b y c requerirán seguramente de algunas figuras de análisis para apoyar las justificaciones que se den. También la notación juega un papel importante en estos problemas, ya que las letras son necesarias para identificar los distintos elementos de las figuras.

El problema 7 de la página 44 propone avanzar en generalidad, considerando el análisis de los polígonos; y, nuevamente, hay afirmaciones que valen solo para algunas figuras y no para otras. Es frecuente que las alumnas y los alumnos consideren que basta con mostrar uno o varios ejemplos que verifican una cierta propiedad para asegurar que vale para todas las figuras de la clase que se está analizando. Este es el caso de Patricia, cuando piensa que lo que vale para el exágono regular se extiende a cualquier polígono regular, sin notar que esto no es así en general.

Tal como se ha propuesto al finalizar otros temas, en *Reflexiones* se invita a realizar una síntesis que contribuye a fortalecer las estrategias de estudio. En este caso, también se resalta el uso de los contraejemplos para justificar que una afirmación no es verdadera.

Tema 4: Áreas y perímetros de figuras, ¿qué cambios valen y cuáles no?

Las magnitudes área y perímetro suelen vincularse fuertemente y, en ocasiones, el vínculo se puede tornar excesivo. Muchos alumnos suelen pensar que si dos figuras poseen el mismo perímetro, poseerán igual área y si poseen igual área, deben poseer igual perímetro, lo que no es necesariamente cierto. Por ejemplo, todos los paralelogramos de 5 cm base y 3 cm de altura poseen igual área y no por ello poseen el mismo perímetro.

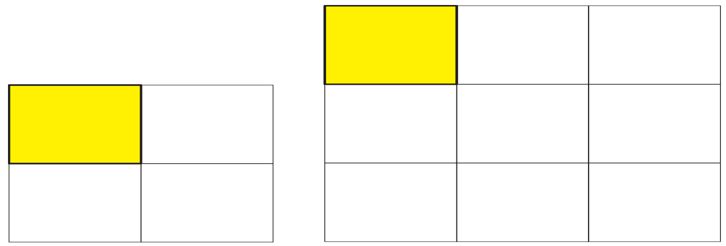


Otras figuras pueden tener la misma área, el mismo perímetro y distinta forma:

¿Cómo cambia el área cuando variamos el perímetro? y ¿cómo varía el perímetro cuando varía el área?

También puede analizarse cómo varía el área de una figura cuando se modifica alguna de sus dimensiones, por ejemplo: ¿cómo varía el área de un rectángulo si se duplican los lados? ¿y si se triplican?

En el primer caso, el área no se duplica, sino que se cuadruplica y, en el segundo caso, se hace nueve veces más grande. Sin embargo, lo que sí se duplica y se triplica es el perímetro.



El trabajo con variaciones permitirá una fecunda interacción con la validación. Lo que es válido para una magnitud, ¿es necesariamente válido para la otra? ¿Por qué sí? ¿Por qué no?

El problema 1 de la página 46 da información sobre los perímetros de distintas figuras y propone discusiones acerca de las posibles áreas. Nuevamente habrá preguntas que tienen una sola respuesta, como en el caso del área del cuadrado de 24 cm de perímetro y otras infinitas, como las áreas de los rectángulos del mismo perímetro. En un primer momento, muchos alumnos arriesgan una colección finita para el caso de los rectángulos, pues consideran valores enteros para los lados (1 y 11, 2 y 10, 3 y 9, etc.) sin tener en cuenta que las medidas pueden tomar valores racionales.

Al considerar cómo varía el área de una figura cuando se modifica su perímetro, en el problema 3 de la página 47 se presenta una nueva oportunidad para abordar el uso de ejemplos y contraejemplos en las argumentaciones. En los casos que presentan Juan y Julia, aumenta el perímetro y aumenta el área, pero es posible mostrar que esto no siempre es así:

área: 1 cm^2
perímetro: 4 cm

área: 1 cm^2
perímetro: 5 cm

área: 0,75 cm^2
perímetro: 6,5 cm

En el punto b, se espera que los alumnos exploren lo que ocurre con una variedad de ejemplos y, en el caso del perímetro, tal vez puedan expresarlo de manera más general $b - 1 + h + 1 + b - 1 + h + 1 = 2\ b + 2\ h$.

El caso del área requiere interpretar una multiplicación por -1 que aún no conocen: $(b - 1) \times (h + 1) = b (h + 1) - (h + 1) = b \times h + b - h - 1$.

Luego, se plantea un caso análogo al del problema 2 pero para área constante.

Para cerrar el tema, en la página 48 se propone analizar las variaciones de área y el perímetro de cuadrados en función de la variación de la longitud de un lado, lo que permite volver sobre los distintos tipos de variaciones que es, justamente, el análisis que se plantea en *Reflexiones*.

Para seguir pensando

En la página 50, bajo el título *¿Por qué parece que vale siempre pero no siempre vale?,* se invita a volver sobre el tema de la validación recuperando las reflexiones realizadas al interior de cada uno de los temas del capítulo y explicitando el sentido de este tipo de trabajo. Tal como señalamos para el capítulo 1 es importante que, si el desarrollo de los temas se hubiera alternado con el de otras actividades, se revise el libro para el alumno o se haga una revisión oral antes de leer y comentar esta página.

En la página 21*, No siempre alcanza con algunos ejemplos,* se vuelve sobre el problema de los azulejos analizado al terminar el capítulo 1, para probar la equivalencia de las expresiones usando la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma. De este modo, el trabajo con variables encuentra un punto de apoyo en los conocimientos aritméticos de los chicos y va creciendo en familiaridad.

La propuesta y el debate en el aula

Las actividades propuestas en este *Cuaderno* están fundamentadas en lo que pensamos que debiera significar "hacer matemática" para los alumnos. En este sentido, precisamos que no es suficiente proponerles actividades "interesantes" o que propicien en los alumnos la búsqueda de estrategias propias de resolución. Esperamos también que los alumnos desarrollen recursos de control sobre sus procedimientos y sobre los ajenos, siendo capaces de apoyarlos o criticarlos con fundamentos matemáticos.

Para que esto sea posible es clave una organización y gestión de la clase en la que se propicien espacios de debate. En ellos, surge la necesidad de pensar la forma más clara de comunicar argumentos cuando se trata de dar cuenta de las estrategias utilizadas y de entender estrategias ajenas, para compararlas y determinar su validez. Este es un plus frente a la actividad de resolver un problema, porque implica un trabajo de comprensión y dominio de la situación mucho mayor. El hecho de justificar "qué se hizo", "cómo se hizo", "por qué se hizo", "si está mal o bien" implica de hecho una reflexión sobre la tarea realizada y una nueva mirada sobre el problema, pero desde la posición de alguien que ya lo ha "desmenuzado".

Desde esta perspectiva, no es lo mismo realizar una confrontación que no hacerlo. Es más, estos espacios son el corazón mismo de los aprendizajes que esperamos propiciar en los alumnos desde esta propuesta.

Si esta práctica matemática forma parte de lo que queremos enseñar, es imprescindible tener en cuenta que necesita construirse a lo largo de toda la escolaridad, teniendo en cuenta las características propias de los alumnos en cada etapa. En este sentido, al gestionar las clases habrá que tener en cuenta si este tipo de trabajo ya se ha desarrollado antes y con qué frecuencia y sistematicidad.

En relación con los temas desarrollados, y como ya hemos planteado, las propuestas incluidas en este *Cuaderno* abordan dos aspectos esenciales de la actividad matemática: la diversidad de representaciones que presenta un mismo objeto matemático y las formas de validación de las respuestas que se producen. Estos aspectos que aparecen en los cuatro ejes organizadores en los NAP de este nivel. En el eje *Número y Operaciones* se propone "elegir la representación más adecuada" al trabajar con cantidades, "argumentar sobre la equivalencia de distintas representaciones" con números naturales y racionales, "argumentar sobre la validez" de procedimientos o resultados de cálculos y de afirmaciones sobre relaciones entre números; en el eje *Álgebra y Funciones*, se plantea "usar diferentes representaciones de las relaciones" de proporcionalidad; en el eje *Geometría y Medida*, aparece "analizar afirmaciones y producir argumentos" para validar propiedades, "argumentar sobre la equivalencia de expresiones" de una cantidad y en el eje *Probabilidad y Estadística* se indica "analizar las ventajas de cada representación" posible de una conjunto de datos en función de la información que se quiere comunicar.

La organización y gestión de estos espacios de debate entre los alumnos implica también un aprendizaje para nosotros, ya que debemos aprender cómo intervenir para propiciar este tipo de trabajo. Cuando los alumnos comienzan a producir solos y aparecen diferentes procedimientos, de diferentes niveles de complejidad, con diferentes tipos de errores, tenemos que decidir, a veces en un instante, qué discutir y , al vez, cómo hacer para que los alumnos hablen y argumenten acerca de sus producciones. Decidir cuáles podrían ser buenas preguntas en este caso y cuáles desorientan más aún al alumno en este tipo de trabajo en el que estamos embarcándolos es un desafío permanente.

En este sentido, resultará muy interesante el debate que se genere en el equipo de la escuela a propósito del uso de este *Cuaderno*. Los intercambios sobre lo ocurrido en las puestas en aula con los colegas y la sistematización de las nuevas propuestas que se puedan formular nos darán pistas para seguir trabajando.

Del mismo modo, la consulta de los materiales recomendados en la sección Bibliografía permitirá ampliar la perspectiva presentada, multiplicar la variedad de propuestas y abrir nuevas preguntas sobre la enseñanza de la Matemática.

Bibliografía

ALAGIA, H, y otros (2005), *Reflexiones teóricas para la educación matemática,* Buenos Aires, Libros del Zorzal.

FUENLABRADA, I., BLOCK, D., BALBUENA H., CARVAJAL, A. (2000), *Juega y aprende Matemática,* Buenos Aires, Novedades Educativas.

ITZCOVICH, H. (2005), *Iniciación al estudio didáctico de la geometría,* Buenos Aires, Libros del Zorzal.

PARRA, C. Y SAIZ, I. (comps.) (1994), *Didáctica de las Matemáticas. Aportes y reflexiones,* Buenos Aires, Paidós.

PONCE, H. (2000), *Enseñar y aprender matemática. Propuestas para el Segundo Ciclo,* Buenos Aires, Novedades Educativas.

PUJADAS, M. y EGUILUZ, M. L. (2000), *Fracciones, ¿un quebradero de cabeza? Sugerencias para el aula,* Buenos Aires, Novedades Educativas.

SADOVSKY, P. (2005), *Enseñar matemática hoy,* Buenos Aires, Libros del Zorzal.

SESSA, C. (2005), *Iniciación al estudio didáctico del álgebra,* Buenos Aires, Libros del Zorzal.

Documentos curriculares para Nivel Primario–EGB, en Internet

División en 5° y 6° de la escuela primaria. Una propuesta para estudiar las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y resto.
La enseñanza de la división en los tres ciclos.
La enseñanza de la geometría en la EGB.
La enseñanza de la multiplicación en los tres ciclos.
En: http://abc.gov.ar/LaInstitucion/SistemaEducativo/EGB/default.cfm

Matemática. Documento de trabajo N° 4. Actualización curricular, 1997.
Matemática. Documento de trabajo N° 5. Actualización curricular, 1998.
Acerca de los números decimales. Una secuencia posible.
Matemática Fracciones y números decimales. Apuntes para la enseñanza.4°, 5°, 6° y 7°.

Matemática. Cálculo mental con números naturales.
Matemática. Cálculo mental con números racionales.
Actualización Curricular 7° Grado.
La formación de los alumnos como estudiantes. Estudiar matemática.
Serie apoyo a los alumnos de primer año en los inicios del nivel medio.
En: http://www.buenosaires.gov.ar/educacion/curricula/index.php

Una forma de uso de la proporcionalidad: las escalas.
Las regularidades: fuente de aprendizaje matemático.
La medida, un cambio de enfoque.
La división por dos cifras: un mito escolar.
La estimación, una forma importante de pensar en Matemática.
En: http://www2.educacion.rionegro.gov.ar/v2005/gcurri/matematica/matemat.htm

Cuadernos para el aula: Matemática 1 a Matemática 6.
Propuestas para el aula. Material para docentes. Matemática EGB 2 y EGB 3.
Juegos en Matemática EGB 2. El juego como recurso para aprender (material para alumnos).
Juegos en Matemática EGB 2. El juego como recurso para aprender (material para docentes).
En: http://www.me.gov.ar/curriform/matematica.html