Programa de reorganización de las trayectorias escolares de los alumnos con sobreedad
en el Nivel Primario de la Ciudad de Buenos Aires

Proyecto Conformación de grados de aceleración

Grado de aceleración 6º | 7º

Tercer Tomo: Geometría

Matemática

Material para el docente

2005

Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Secretaría de Educación. Subsecretaría de Educación. Dirección General de Planeamiento.

Dirección General de Planeamiento. Secretaría de Educación. Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.
Grados de aceleración 6º/7º : material para el docente : matemática : 3º Tomo /
coordinado por Alejandra Rossano y María Elena Cuter. - 2a ed.- Buenos Aires :
Dirección General de Planeamiento de la Secretaría de Educación GCBA, 2005.
52 p. ; 28x21 cm.

ISBN 987-549-234-5
1. Educación-Programas de Estudios I. Rossano, Alejandra, coord. II. Cuter, María, coord. I. Título.
CDD 372.011

Dirección General de Planeamiento
Bartolomé Mitre 1249 . CPA c1036aaw . Buenos Aires
Teléfono/fax: 4372 5965
e-mail: dgpl@buenosaires.esc.edu.ar

Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires

Jefe de Gobierno

Dr. Aníbal Ibarra

Vicejefe de Gobierno

Lic. Jorge Telerman

Secretaria de Educación

Lic. Roxana Perazza

Subsecretaria de Educación

Lic. Flavia Terigi

Directora General de Planeamiento

Lic. Florencia Finnegan

Directora General de Planeamiento

Lic. Florencia Finnegan

Directora de Currícula

Lic. Cecilia Parra

Coordinadoras del Programa

María Elena Cuter ▪ María Alejandra Rossano

Equipo técnico del Programa

Antonio Carabajal ▪ Mercedes Etchemendy ▪ Marcela Fridman ▪ Ianina Gueler ▪ Mariela Helman
Guillermo Micó ▪ Egle Pitón ▪ Matías Scheinig ▪ Paola Tarasow ▪ Violeta Wolinsky

Dirección de Currícula

Coordinación General

Susana Wolman

Matemática

Coordinación del área y supervisión del trabajo

Patricia Sadovsky

Elaboración de este material curricular

Héctor Ponce ▪ María Emilia Quaranta

Coordinación del equipo de edición: Octavio Kulesz.

Corrección: Teresita Vernino.

Diseño gráfico y diagramación: María Victoria Bardini, Verónica Feinmann, Gabriela Middonno.

Ilustraciones: Eugenia Nobati.

Í N D I C E

MATEMÁTICA

GEOMETRÍA[1]

CÍRCULO Y CIRCUNFERENCIA

Objetivos

A través de las siguientes situaciones se espera que los alumnos:

- Profundicen sus conceptualizaciones sobre la noción de circunferencia y círculo.
- Reutilicen esos conocimientos para construir triángulos.
- Avancen en sus posibilidades de elaborar conjeturas y defenderlas o refutarlas a través de la utilización de propiedades geométricas.
- Se apropien de un conjunto de conocimientos vinculados a ciertas características de los triángulos tales como: el valor de la suma de los ángulos interiores y la propiedad triangular.
- Progresen en la apropiación de un vocabulario específico que les permita hacer referencia a los conceptos que utilizan.
- Avancen en la caracterización del triángulo a partir de las propiedades de sus lados y sus ángulos.
- Mejoren en sus posibilidades de identificar un cuadrilátero a partir de caracterizar sus lados, ángulos o diagonales.
- Puedan determinar la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero a partir de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.
- Exploren y analicen el valor de los ángulos interiores de los paralelogramos y las relaciones que pueden establecerse entre ellos.

1 Para profundizar en el análisis de los contenidos que se proponen a continuación, recomendamos la lectura previa de los siguientes materiales:
- Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires (1999): *Pre Diseño Curricular para la Educación General Básica. Segundo Ciclo, Matemática,* páginas 554 y 564.
- Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, Secretaría de Educación, Dirección de Currícula (1998): *Matemática. La enseñanza de la Geometría en el segundo ciclo*. Documento de trabajo n° 5. capítulo 1.

Contenidos

- Resolución de situaciones que impliquen concebir la circunferencia como conjunto de puntos que equidistan de un centro.
- Resolución de situaciones que impliquen concebir el círculo como un conjunto de puntos que están a una distancia del centro menor o igual que una distancia dada.
- Realización de construcciones que movilicen la definición de circunferencia.
- Utilización del compás como recurso para transportar segmentos.
- Exploración de las condiciones que permitan construir un triángulo a partir de los tres lados. Identificación de la propiedad triangular.
- Construcción de triángulos con regla y compás a partir de diferentes informaciones.
- Determinación del valor de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.
- Identificación de triángulos según las características de sus lados y sus ángulos.
- Determinación del valor de la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero.
- Construcción de paralelogramos con regla y compás a partir de diferentes informaciones.

Para iniciar las reflexiones en torno de la enseñanza de la geometría, citamos algunos párrafos del *Pre Diseño Curricular* de la Ciudad de Buenos Aires:

"Para que los alumnos puedan profundizar sus conocimientos geométricos, es decir, para que puedan avanzar en el análisis de las propiedades de las figuras, será necesario –como ocurre en otros ámbitos de la actividad matemática– que el conocimiento geométrico se elabore a partir de la resolución de los problemas que los niños enfrenten. En este sentido es importante superar –en el momento de pensar un proyecto de enseñanza– la idea de que los dibujos 'muestran' las relaciones que los niños deben construir. Aquello que el dibujo 'muestra' –o mejor dicho, aquello que un sujeto es capaz de 'ver' en el dibujo– será función de los conocimientos que se posean con relación al objeto que ese dibujo representa.

Como se ha planteado en el enfoque general que orienta este proyecto, el segundo ciclo es el 'ámbito' en el que los niños deberán aprender que los conocimientos geométricos son un medio para poder establecer afirmaciones sobre los objetos con los que tratan sin necesidad de apelar a la constatación empírica. *('Puedo estar seguro, sin medir, que este ángulo mide 30° porque entre los otros dos ángulos de este triángulo suman 150°'.)* La construcción de esta racionalidad particular –propia de la actividad matemática–, que se apoya en el conocimiento de las propiedades para tomar decisiones que sustituyen las constataciones empíricas, es un proceso largo que incluye la resolución de diferentes tipos de problemas. Enfrentar un problema supone siempre, en algún nivel, la movilización de ciertos conocimientos –ya elaborados o en vías de elaboración–, que serán confirmados, reorganizados, reestructurados o cuestionados a través de la resolución. Esto plantea un juego dialéctico entre anticipación, resolución y validación, que no excluye de ninguna manera las constataciones empíricas, pero que las ubica –siempre– como respuesta a alguna pregunta que los niños se han formulado, a alguna anticipación que han hecho. En este marco, la constatación empírica puede cumplir una función en la construcción del conocimiento. Cuando, en cambio, se plantea sólo con relación a sí misma, sus resultados no se integran a ninguna organización del conocimiento".[2]

[2] *Pre Diseño Curricular para la Educación General Básica. Segundo ciclo. Matemática*, tomo 2. páginas 555 y 556.

En los problemas que se proponen a continuación, se ha decidido presentar en primer lugar actividades que apuntan a que los niños puedan avanzar en sus conocimientos acerca de la circunferencia y el círculo.

¿Qué razones fundamentan esta decisión? Como podrá notarse al analizar los problemas, la definición de circunferencia resulta un requisito fundamental para el trabajo con triángulos. Por ejemplo, encontrar un punto dadas las distancias respecto de los extremos de un segmento determinado, requiere saber cómo encontrar todos los puntos que equidistan de uno dado y ésa es, precisamente, la definición de circunferencia. Al mismo tiempo, el hecho de que desde la enseñanza se insista en propiciar que los alumnos apelen a este tipo de estrategias al construir triángulos, permite que el trabajo geométrico se inserte –como planteamos al comienzo– en el terreno de lo argumentativo y, a la vez, que las construcciones logren constituirse en una posibilidad de reflexionar sobre los objetos con los que se está trabajando en lugar de reducirse a un conjunto de pasos a seguir.

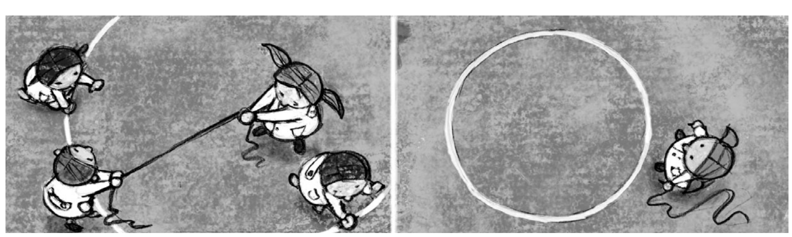
Actividad 1

PROBLEMAS PARA EMPEZAR A TRABAJAR CON CÍRCULOS Y CIRCUNFERENCIAS

Generalmente, las actividades que se proponen para el aprendizaje de ciertos conocimientos geométricos en la escuela suelen desarrollarse en un espacio reducido. Es decir, son problemas que pueden resolverse dentro de los márgenes de una hoja del cuaderno. Cuando el tamaño de las representaciones con las que se trabaja queda atrapado exclusivamente en estas dimensiones, se corre el riesgo de no incorporar la problemática que plantea la resolución de problemas geométricos en dimensiones mayores. Por ejemplo: al intentar dibujar la circunferencia en el patio, ¿en qué medida el trabajo en este nuevo "tamaño" abona la conceptualización de los niños sobre la circunferencia? El hecho de tener que garantizar ciertas condiciones, por ejemplo, que todos los puntos estén a la misma distancia del centro para que la marca en el patio quede circular, permite que el procedimiento realizado con el compás sea a la vez un punto de referencia y también una oportunidad para reflexionar sobre la utilización de ese instrumento.

Es posible que los niños por sí solos no establezcan de manera generalizada relaciones entre ambos procedimientos. En el problema planteado a continuación se pone en juego esta vinculación. Los niños ya saben trazar circunferencias y pueden definirlas a partir del trabajo realizado en el ciclo lectivo precedente. El maestro deberá apoyarse en esos conocimientos, asegurarse de que la reflexión colectiva "transite" por estas ideas y proponer estas relaciones si no aparecieran espontáneamente de parte de los niños, como también deberá organizarlas sobre el cierre de la clase para que puedan ser sistematizadas en las carpetas de sus alumnos.

Material para el alumno (1° bimestre, página 60)



1)

a) Organizados por grupos, tienen que ingeniarse para marcar en el patio, con tiza, una pista circular. Pueden usar sogas para trazarla.

b) Una vez realizada la pista, contesten las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la máxima distancia que puede recorrerse desde un borde de la pista hasta otro borde de la pista, yendo en línea recta?

- ¿Qué relación hay entre el procedimiento usado en el patio y la utilización del compás para trazar una circunferencia?

Recordá
El círculo está formado por la circunferencia y todos sus puntos interiores.
Cualquier segmento que tiene sus extremos en puntos de una circunferencia se llama cuerda. Cualquier cuerda que pasa por el centro de la circunferencia se llama diámetro.

Recordá
El conjunto de puntos que se encuentra a la misma distancia de un punto dado es la circunferencia.
El punto dado se llama **centro** de la circunferencia y la distancia del centro a un punto de la circunferencia (la "abertura" del compás) se denomina **radio.**

Cuestiones
a) ¿Qué relación hay entre la longitud del radio y la longitud del diámetro?
b) Comparen la longitud de una cuerda que no pasa por el centro con la longitud del diámetro.

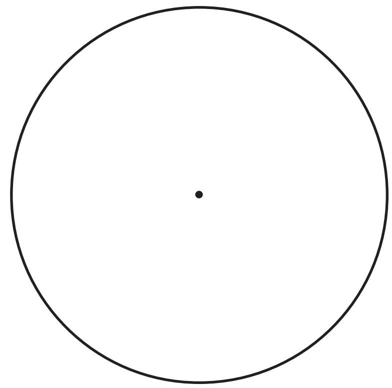
PARA TENER EN CUENTA

Podrá notarse que en este material aparecen remarcadas algunas definiciones y comentarios. Sería productivo que el maestro genere en la clase un espacio de lectura y análisis colectivo sobre ellos.

El problema que se plantea a continuación pone en juego la definición de circunferencia. Se trata de un juego en el que los alumnos deben "dictarse" puntos de un círculo.

Material para el alumno (1° bimestre, página 62)

2) Éste es un juego para dos participantes.



Reglas del juego:
Cada jugador tiene un círculo como el que muestra el dibujo. (Lo pueden calcar de este original.)

Un jugador es emisor y el otro es receptor. El emisor coloca un punto en cualquier parte del círculo sin mostrárselo al receptor a quien debe enviarle un mensaje indicando dónde está ubicado ese punto. El receptor debe pintar el punto en su propio círculo.

El mensaje no puede tener dibujos.

El receptor tiene que seguir las instrucciones que ha recibido y colocar un punto en su propio círculo.

Si en el mensaje hay algo que no se entiende, el receptor puede enviar a su compañero una pregunta o pedir aclaraciones, siempre por escrito, que serán respondidas del mismo modo.

Cuando ambos jugadores creen estar listos, se reúnen y colocan un círculo encima de otro haciendo coincidir los centros, para ver si los puntos coinciden. Si fuera necesario, está permitido dejar un círculo quieto y girar el otro para que los puntos coincidan.

Si se logra que los puntos coincidan, ambos jugadores ganan.

a) Cuando terminen el juego, comparen sus mensajes con los de sus compañeros. Analicen qué informaciones deben contener para que se pueda estar seguro de que van a ganar.

b) Ahora vuelvan a jugar pero intercambien los lugares: el receptor pasa a ser emisor, y viceversa.

El ejercicio tiene dos momentos bien diferenciados: el primero, en el que los emisores anticipan qué informaciones deben enviar para cumplir con la finalidad solicitada y, el segundo, cuando deben comprobar si esa anticipación fue correcta o no.

Al explicar el ejercicio es importante que los alumnos comprendan que uno de los círculos se puede rotar para comprobar si ambos puntos coinciden.

Es muy probable que, en una primera ronda, los mensajes no resulten del todo efectivos y los emisores no consigan el objetivo de ofrecer pistas para que los receptores ubiquen el punto en el círculo. Es prioritario que el maestro tenga claro que el "fracaso" de los primeros mensajes se debe a que los alumnos están elaborando las relaciones necesarias para resolver la situación. Por esa razón, será importante que sostenga el problema y aliente a los alumnos a seguir trabajando. A partir del análisis de los mensajes que "fracasan", los niños podrán ajustarlos e identificar qué aspectos de la figura deben tener en cuenta para responder al problema. Es por esto que no estamos pensando en esta propuesta como una actividad que "se juega" una sola vez, sino que la concebimos como una situación que tiene varias rondas. De este modo, los niños podrán utilizar aquello que han discutido y verificar si sus nuevas anticipaciones les permiten tener éxito en el trabajo.

PARA TENER EN CUENTA

En el problema 2b) se plantea que las funciones en el juego se roten. Es importante que el maestro tenga en cuenta que, bajo un mismo problema para toda la clase, las tareas y las dificultades son diferentes en función del rol que deba cumplirse. Así, para quienes son emisores, la redacción del mensaje implica tomar decisiones respecto de qué informaciones son necesarias y los enfrenta con la necesidad de plantearlas de modo tal que sus compañeros puedan comprenderlas.

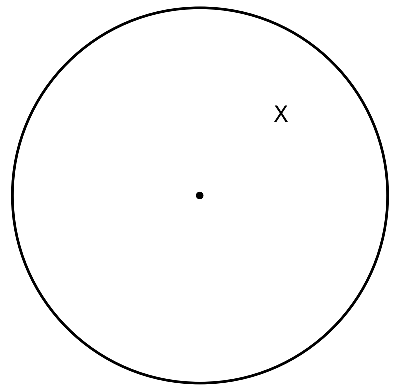
A su vez, para quienes son receptores, el desafío consiste en interpretar los datos que reciben, interpretación que requiere identificar las establecidas por sus compañeros.

Así, tanto para unos como para otros, resulta necesario, a través de las sucesivas versiones de mensajes y con la ayuda del docente, establecer ciertos acuerdos sobre el tipo de información que debe brindarse. (En este caso –como ya dijimos–, la distancia del centro al punto o del punto al borde del círculo.)

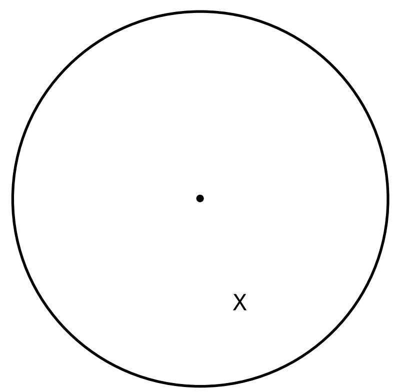
Material para el alumno (1° bimestre, página 63)

3) Este problema es para resolver de a dos.

Martín y Andrés jugaron al juego que te propusimos en el problema anterior. El siguiente es el círculo que tenía Martín:



Y éste es el que tenía Andrés:



Sin calcar los círculos, ¿es posible saber si los puntos van a coincidir?

Discutan entre ustedes cómo hacer para averiguarlo y después comprueben calcando si lo que habían previsto era cierto.

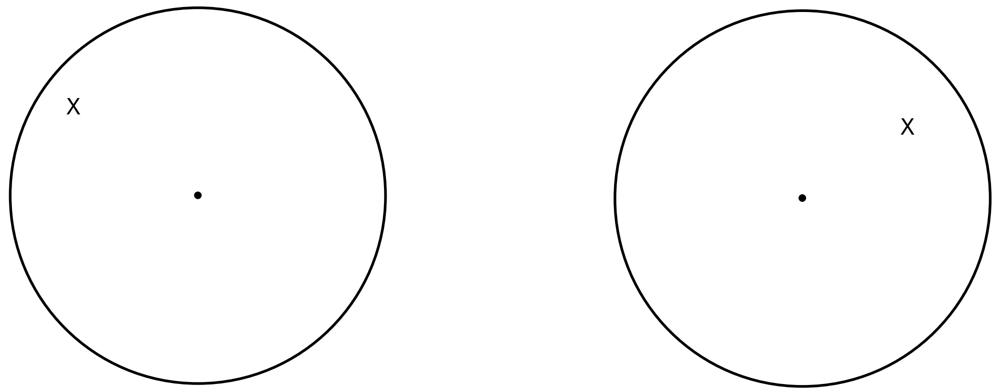
Escriban instrucciones que permitan estar seguros si, dados dos círculos con un punto marcado en cada uno de ellos, los dos puntos van a coincidir o no.

El interés de escribir un instructivo radica en que permite que los niños "pasen en limpio" las discusiones y conclusiones a las que fueron llegando. Debe tenerse en cuenta que, aun en el caso en que los alumnos hayan llegado a formulaciones correctas en sus resoluciones, eso no garantiza que aparezcan presentadas de modo sistemático y organizado. Por esa razón, el maestro tomará las producciones de sus alumnos, propondrá su revisión conjunta para formular un texto único y colectivo, y explicará los conceptos que considere que deben ajustarse o que no han quedado del todo claros. Podría llegarse a formulaciones parecidas a las siguientes: "Para estar seguro de si los puntos van a coincidir se puede medir con la regla la distancia desde el centro hasta la ubicación de cada punto. Si la medida es la misma, se los puede hacer coincidir". "Si se dobla el círculo por la mitad formando una línea que pasa por el punto, se puede medir sobre esa línea la distancia desde el borde hasta el punto. Si es la misma distancia en los dos círculos, los puntos van a coincidir".

El docente propondrá explícitamente que las instrucciones ya elaboradas y analizadas se utilicen para resolver el problema que sigue.

Material para el alumno (1° bimestre, página 64)

4) ¿Es verdad que en estos dos círculos los puntos "coinciden"?



Cuestión
¿Es verdad que el procedimiento que ustedes emplean sirve sólo cuando los círculos tienen el mismo diámetro?

Frente a esta cuestión, quizá los alumnos piensen de entrada que el juego sólo es posible con circunferencias del mismo diámetro. Constatar que no es así permitirá enriquecer las conceptualizaciones acerca de la circunferencia y el círculo. Aquí interviene la idea de circunferencias concéntricas. Los alumnos podrán advertir que, si se hacen coincidir los centros y el punto no ha sido ubicado a una distancia del centro que supere el radio de la circunferencia de menor diámetro, es posible hacerlos coincidir. Se intentará llevar a los alumnos a comprender que, aunque una de las circunferencias tenga radio mayor que la otra, puede "visualizarse" en ella una circunferencia del mismo centro y el mismo radio que la menor. Es interesante resaltar que, de alguna manera, la circunferencia de menor radio está contenida en la de radio mayor.

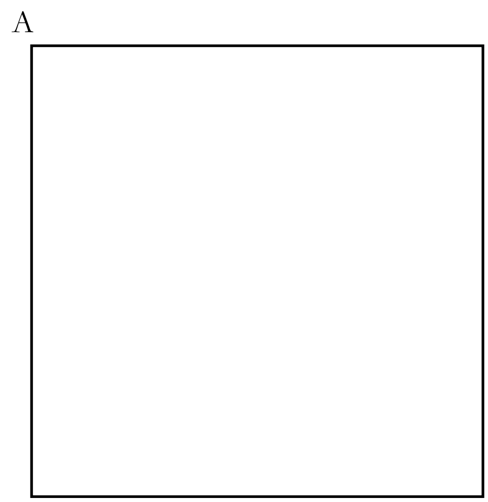
5) Los distintivos del club

El objetivo de este problema es que los niños puedan reinvertir la noción de círculo y circunferencia en problemas en los que intervienen otras figuras.

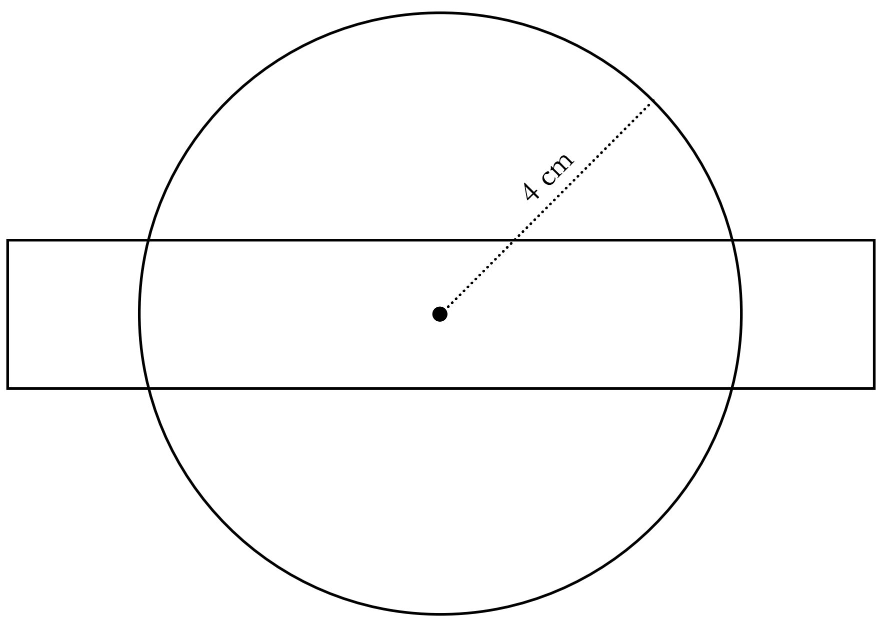
Material para el alumno (1° bimestre, página 64)

Un club quiere diseñar los distintivos de su equipo de vóleibol. Para eso, llamó a un concurso de distintivos. Cada diseñador tiene que proponer su diseño y un jurado elegirá cuál será finalmente el distintivo del club.

El diseñador A hizo la siguiente propuesta:
El distintivo es un cuadrado de 6 cm de lado.
En este distintivo hay que pintar:
- de amarillo la parte que está a 6 cm o menos del punto A,
- de azul la parte que está a más de 6 cm de de A.



El diseñador B dijo:
El distintivo que propongo está formado por un rectángulo y una circunferencia cuyo centro coincide con el punto donde se cortan las diagonales del rectángulo.
- la parte del rectángulo que está a más de 4 cm del centro de la circunferencia va pintada de rojo.
- la parte del rectángulo que está a 4 cm o menos del centro de la circunferencia va pintada de amarillo.



Dibujen los distintivos de cada uno de los diseñadores.

Será interesante que los niños tomen conciencia de que no hace falta medir para saber de qué color pintar. Se espera que ellos puedan, para el caso del segundo problema, proponer expresiones del tipo: *Ya sabemos que todos los puntos que están adentro del círculo están a 4 cm o menos del centro, los que están afuera miden más de 4 cm, etcétera.*[3]

Actividad **2**

CONSTRUCCIONES CON COMPÁS

En este problema, el objetivo es que los niños puedan reinvertir la noción de circunferencia ya trabajada en situaciones anteriores. Esto es, se aspira a que, para hallar la solución, apelen directamente al uso del compás y no que vayan "encontrando" con regla los puntos que cumplen estas condiciones. Es muy probable que, a esta altura, la mayoría de los alumnos reconozcan como necesaria la utilización del compás. Sin embargo, si el docente observara que esto no ocurre, deberá llamar la atención poniendo en relación esta situación tanto con los problemas anteriores como con los "del pirata" resueltos el año anterior.

Material para el alumno (1° bimestre, página 66)

1) Dibujen un punto que cumpla simultáneamente las dos condiciones siguientes:
que esté a 4 cm de distancia del punto A, y
que esté a 4 cm del punto B.
¿Cuántos puntos cumplen esta condición?

A x B x

[3] Para un análisis detallado de este problema, consultar: Documento de trabajo nº 5, *La enseñanza de la Geometría en el segundo ciclo*, Dirección de Currícula GCBA, 1998, páginas 71 y 72.

Cuestión
¿A qué distancia deben estar A y B para que haya un único punto que se encuentre a 4 cm de cada uno de ellos?
¿Y para que no haya ninguno?

2)
a) Dos puntos M y N están a 6 cm uno de otro.
¿Es posible encontrar puntos que estén simultáneamente a 4 cm de M y de N? ¿Cuántos son?
¿Y que estén a 3 cm de M y de N? ¿Cuántos hay?
¿Y que estén a 9 cm de M y N? ¿Cuántos hay?
¿Y que estén a 1 cm de M y N? ¿Cuántos hay?

b) En el problema anterior encontraste que:
- a veces, hay 2 puntos que cumplen las condiciones solicitadas;
- a veces, hay uno solo;
- y a veces, no hay ninguno.

¿Habrá alguna otra posibilidad?

Explicá en qué casos se da cada una de las posibilidades que encontraste.

Aquí nuevamente el rol del docente es fundamental, ya que sin su gestión será difícil que los alumnos organicen las conclusiones que fueron apareciendo. En las carpetas podrá quedar registrado que si los puntos buscados están a una distancia mayor que la mitad de la distancia que separa a los dos puntos dados, entonces hay dos soluciones. Si los puntos buscados están a la mitad de la distancia de los dos puntos dados, entonces hay una única solución, y si los puntos buscados están a una distancia menor que la mitad de la que separa los dos puntos dados, entonces ese problema no tiene solución porque no puede haber ningún punto que cumpla con esa condición.

Seguramente los niños no formulen una regla de nivel general como la anterior sino planteen las respuestas en el plano de los ejemplos o en el análisis de cada caso. Estas primeras formulaciones constituirían puntos de apoyo a partir de los cuales el docente podrá orientar la discusión de modo tal que pueda ser esbozada una regla general. Por ejemplo, se espera que los niños formulen expresiones del tipo *Siempre pasa esto, mirá cuando los puntos están separados 4 cm y vos buscás un punto que esté a 3 cm de ambos..., o ponele que lo pensamos para una distancia de 4 cm, pero sería lo mismo con otras medidas..., etcétera.*

Material para el alumno (1° bimestre, página 68)

3) Se sabe que los puntos A y B están a 5 cm de distancia. Decidí, antes de construir, cuántos puntos vas a encontrar que cumplen las condiciones solicitadas. Luego, si es necesario, comprobá realizando la construcción.

A$^{\times}$ B$^{\times}$

¿Cuántos puntos es posible encontrar que estén simultáneamente a 7 cm de A y de B?
¿Cuántos puntos es posible encontrar que estén simultáneamente a 3 cm de A y de B?
¿Cuántos puntos es posible encontrar que estén simultáneamente a 2,5 cm de A y de B?

Cuestión
A partir de las conclusiones del problema anterior, discutan si es posible que exista un triángulo cuyos lados tengan las siguientes medidas: 9 cm; 5 cm y 4 cm. ¿Y uno de 10 cm, 3 cm y 6 cm?

Tal vez algunos alumnos no relacionen el problema anterior con la construcción de triángulos que plantea la **Cuestión**. Es esperable que aparezca esta dificultad puesto que existe un salto entre pensar condiciones para la ubicación de puntos y concebir dichos puntos como los vértices de un triángulo en el que la longitud de los lados está determinada por las condiciones del problema. En un caso, se trata de pensar puntos "sueltos", mientras que en el otro se trata de pensar a los vértices como puntos en una ubicación particular dentro de la figura y los lados del triángulo como las distancias entre ellos.

Este salto puede provocar la reaparición de procedimientos que parecían abandonados. Por ejemplo, es posible que los alumnos construyan el triángulo a partir de tantear y ajustar con la regla el punto donde se corten los segmentos dados. Si esto ocurriera, será interesante que el maestro señale que se está usando la regla como compás y fuerce para que éste sea usado.

Es importante tener en cuenta que la pregunta anterior plantea si *existe* un triángulo que cumple determinadas condiciones y no si los niños pueden dibujarlo. De hecho, es muy posible que los alumnos lo dibujen, aunque –como sabemos– este triángulo no existe, ya que la única posibilidad de que un punto esté simultáneamente a 4 cm y a 5 cm de otros dos que distan 9 cm entre sí es que esté "apoyado" sobre el segmento que los une y por lo tanto en ese caso no se forma el triángulo. Sin embargo, al realizar la medición, el margen de error permite que el triángulo quede plasmado, aunque un poco "aplastado" en la hoja, cuando los niños intentan construirlo.

Ahora bien, es interesante notar que el criterio de validación al que los alumnos apelan de entrada es si ellos pueden o no dibujarlo. Como lo pueden dibujar, entonces existe. La situación ofrece una oportunidad para centrar el análisis en las condiciones, y empezar a tomar conciencia de que el dibujo puede mostrar información "equivocada".

Se enfrentan aquí dos lógicas distintas de validación: una, empírica, apoyada completamente en las "evidencias" del dibujo, y otra, basada en las relaciones involucradas en el problema.

En definitiva, estamos pensando en que la discusión deje de estar en el plano del *"no me sale"* para ubicarse en el terreno del *"no es posible".* Entendemos que esta forma de "pensar" lo geométrico es una construcción de largo plazo, pero creemos que debe formar parte de los conocimientos a los que se apunta en esta unidad.

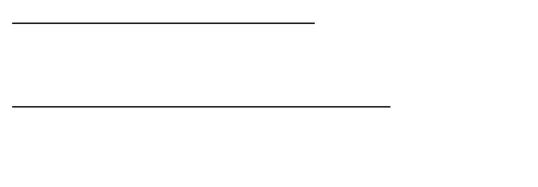
Este problema también abre la discusión a las complejas relaciones entre dibujo y figura. Para profundizar en esos conceptos, recomendamos la lectura del capítulo 1 del *Documento de trabajo n° 5, La enseñanza de la Geometría en el segundo ciclo,* al que ya se ha hecho referencia.

Material para el alumno (1° bimestre, página 68)

4) Teniendo en cuenta el análisis que realizaron para la cuestión anterior, si tuvieran que explicar cómo tienen que ser las medidas de los lados de cualquier triángulo para que ese triángulo exista, ¿qué explicación escribirían?

Escriban una regla que exprese la relación que debe verificarse entre las medidas de los lados de cualquier triángulo. Esta regla debe servirles para que, con sólo conocer las medidas de los lados, puedan estar seguros, antes de construir, si ese triángulo existe o no. Al final de esta unidad, nosotros escribimos una propiedad que se llama "propiedad triangular". Después de que ustedes hayan escrito la regla compárenla con esa propiedad.

5) Dibujá un triángulo cuyos lados tengan la misma longitud que los siguientes segmentos. Hacelo usando regla no graduada y compás.



Este último problema incorpora una diferencia respecto del trabajo anterior. En los problemas precedentes, la medida de los lados se informaba, estaba dada en centímetros y los niños podían trazar los segmentos con regla teniendo en cuenta esos datos. Aquí, en cambio, aunque se tenga "a la vista" el largo de cada uno de los segmentos, sus medidas en centímetros se desconocen y, además, los niños deberán apelar al compás para trasladarlos. Todo esto implica una nueva dificultad que deberá ser tenida en cuenta por el docente.

Material para el alumno

6) Dibujá un triángulo que tenga un lado de 7 cm, otro de 5 cm y otro de 6 cm. Hacelo empezando por el lado de 7 cm, luego hacelo empezando por el lado de 5 cm y, finalmente, empezá por el lado de 6 cm. Si recortaras los tres triángulos, ¿podrías hacerlos coincidir al superponerlos? Anticipá una respuesta a esta pregunta antes de hacerlos y recién después verificala con tus construcciones.

Si los lados de un triángulo tienen la misma longitud que los lados de otro triángulo, ambos triángulos coinciden al superponerlos. Si al superponer dos triángulos se los puede hacer coincidir completamente, diremos que dichos triángulos son iguales. Si no coinciden, diremos que son diferentes.

El recuadro anterior presenta una definición de igualdad de triángulos. Ésta es una idea compleja para los niños. Muchos niños piensan que si dos triángulos están en distinta posición, son diferentes aunque coincidan al superponerlos. Será interesante discutir acerca de estas cuestiones en la clase.

Si un triángulo tiene un ángulo recto, se llama triángulo *rectángulo*. Los lados de un triángulo rectángulo que forman el ángulo recto se llaman *catetos*. Si un triángulo tiene sus tres ángulos agudos, se llama triángulo *acutángulo*. Si un triángulo tiene un ángulo obtuso, se llama *obtusángulo*.

7)

a)

Dibujá dos puntos A y B, que estén a 6 cm de distancia.
Dibujá un punto C que esté a 7 cm de A y de B.
Dibujá el punto medio de AB y llamalo M.
¿Cómo podrías explicar la razón por la cual los triángulos AMC y BMC que se forman "quedan" rectángulos?

No vale decir "porque sí". Habría que entender por qué necesariamente los ángulos AMC y BMC son rectos.

La explicación que se pide se basa en la igualdad de dos triángulos y es la primera de este tipo que los alumnos deben enfrentar. Es sensato pensar que no la van a poder producir ellos solos, pero las aproximaciones que realicen podrán servir de base a una explicación que probablemente deba dar el maestro. A través de este y otros problemas irán aprendiendo a establecer relaciones entre elementos, basadas en comparaciones de triángulos. La explicación a la que finalmente se arribe podrá ser cercana a la siguiente: "En el triángulo ACB los lados AC y CB son iguales. Si se comparan los triángulos AMC y BMC, se obtiene que el lado AM es igual al lado MB y que el lado AC es igual al lado BC y también que el lado MC es el mismo en ambos triángulos. Los triángulos AMC y BMC son, entonces, iguales. Los ángulos AMC y BMC son iguales y entre los dos forman un llano, por lo tanto, cada uno es recto.

Como podrá notarse, la producción de explicaciones es un aspecto esencial del trabajo que aquí se propone. Elaborar una conjetura y poder explicarla supone apoyarse en alguna propiedad, en algún conocimiento, para generar otro nuevo o para volver explícito uno que se está usando. Es posible que los alumnos encuentren algunas dificultades para desplegar este tipo de trabajo, no sólo por la complejidad que el tema encierra, sino también porque no están habituados a validar sus afirmaciones a través de argumentos. Lograr que entren en estas formas de trabajo será una tarea difícil para el maestro, cuyos frutos podrá reconocer luego de un período prolongado de tiempo con este tipo de cuestiones.

Material para el alumno (1° bimestre, página 71)

b) Busquen un punto D que esté a 4 cm de A y de B. Los triángulos AMD y BMD también son rectángulos. ¿Pueden explicarlo de la misma manera que propusieron para el problema anterior?

c) ¿Existen puntos que estén a 40 cm de A y de B?
¿Y puntos que estén a 1 m de A y de B?
¿Y puntos que estén a 1 cm de A y de B?
¿Y a 1,5 cm?
¿Y a 2 m?

d) Si te prponen como consigna "encontrar puntos que estén a la misma distancia de A y de B", ¿cuántos puntos podés hallar para cada una de las distancias que te den?

e) ¿Qué enunciado general podrían proponer a partir de las explicaciones anteriores?

De paso cañazo, aprovechamos para dar algunas definiciones:
En la figura anterior, el triángulo ABC tiene dos lados de la misma longitud (así lo construiste). Un triángulo que tiene dos lados de la misma longitud se llama isósceles.

Cuestión
¿Qué otros triángulos isósceles hay en la figura que fuiste haciendo a partir de este problema?

TRIÁNGULOS

Actividad **1**

RETOMANDO LA CONSTRUCCIÓN DE TRIÁNGULOS A PARTIR DE LOS LADOS

Antes de entrar de lleno en nuevas cuestiones, en el material para el alumno del 2° bimestre (páginas 85 y 86) se propone una actividad ya realizada en el primer bimestre, con el objetivo de actualizar las conclusiones a las que habían arribado los alumnos.

Actividad **2** **CONSTRUCCIÓN DE TRIÁNGULOS**

Material para el alumno (2° bimestre, página 86)

1) Lean la siguiente información:

Si se tiene en cuenta la medida de los lados de un triángulo, puede ocurrir que:
- Los tres lados tengan la misma medida. Esos triángulos se llaman *equiláteros*.
- Dos de los lados tengan la misma medida. Esos triángulos se llaman *isósceles*.
- Todos los lados tengan distintas medidas. Esos triángulos se llaman *escalenos*.

Como ya se ha definido, si se tiene en cuenta la medida de los ángulos de un triángulo, puede ocurrir que:
- Los tres ángulos sean agudos. Esos triángulos se llaman *acutángulos*.
- Uno de sus ángulos sea obtuso. Esos triángulos se llaman *obtusángulos*.
- Uno de sus ángulos sea recto. Esos triángulos se llaman *rectángulos*. Los lados de un triángulo rectángulo que forman el ángulo recto, se llaman *catetos*.

2) La maestra de Manuel y de Juan ha propuesto lo siguiente:

"Dibujen un triángulo isósceles sabiendo que hay otro lado igual a éste":

Manuel dice que es posible dibujar un solo triángulo y Juan dice que Manuel está equivocado, que hay muchas construcciones posibles. ¿Quién tiene razón?

3) Se sabe que el siguiente es el lado "desigual" de un triángulo isósceles. Construí el triángulo utilizando regla no graduada y compás. ¿Cuántas soluciones tiene este problema?

4) Se quiere construir un triángulo y se conocen dos de sus lados. Uno de ellos mide 8 cm y el otro, 7 cm. Construyan el triángulo. ¿Cuántos triángulos diferentes hay que puedan cumplir estas condiciones?

Al analizar que hay infinitos triángulos posibles que tienen como lados dos segmentos dados, se comprende mejor por qué los tres lados determinan el triángulo.

5) Utilizando regla no graduada y compás, construyan un triángulo equilátero cuyos lados tengan la misma longitud que este segmento. ¿Se pueden construir diferentes triángulos equiláteros que cumplan esta condición?

Actividad **3**

ANALIZANDO LA SUMA DE LOS ÁNGULOS INTERIORES DE LOS TRIÁNGULOS

PARA TENER EN CUENTA

Antes de comenzar con estos problemas es conveniente que el docente retome el trabajo realizado con el transportador para la medición de ángulos.

Para abordar este tema proponemos una serie de problemas que apuntan a que pueda demostrarse que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180º. El tipo de práctica para el trabajo en geometría que venimos planteando en este material intenta alejarse del trabajo empírico, para insertar lo geométrico en el terreno de la deducción. Por esa razón, consideramos que los intentos de "demostrar" esta propiedad a través del recorte de los ángulos de un triángulo, del calcado de los tres ángulos de manera consecutiva o de la medición de los tres ángulos y la posterior suma de éstos no son suficientes para promover el trabajo argumentativo.

Material para el alumno (2° bimestre, página 88)

1) Dibujen un triángulo que tenga un ángulo de 60º y otro de 30º. ¿Cuántos triángulos diferentes que cumplan estas condiciones se pueden construir?
2) Dibujen un triángulo que tenga un ángulo de 120º y otro de 100º. ¿Cuántos triángulos diferentes que cumplan estas condiciones se pueden construir?
3) Dibujen un triángulo que tenga dos ángulos de 90º. ¿Cuántos se pueden construir?
4) Dibujen un triángulo que tenga un ángulo de 120º y otro de 60º. ¿Cuántos se pueden construir?

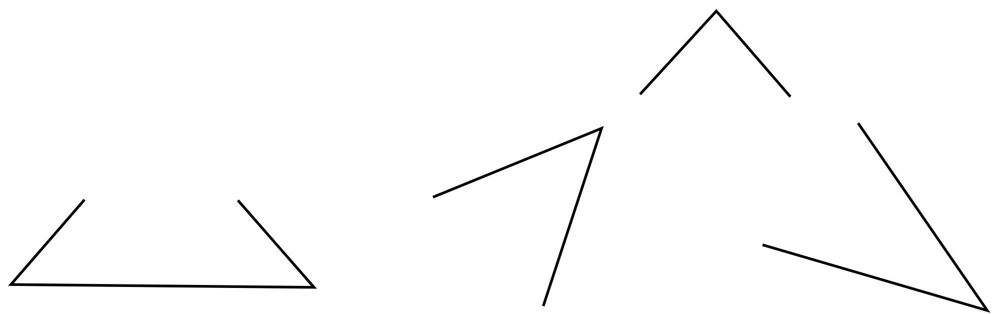
Cuestión
Teniendo en cuenta los problemas anteriores, analicen la siguiente afirmación: "Para que pueda construirse un triángulo, la suma de dos de sus ángulos debe ser siempre menor que 180º".

Cuando dos ángulos suman 180 grados, los lados del "triángulo" quedan paralelos. Esto permite explicar por qué la suma de dos de los ángulos debe ser menor que 180 grados.

El problema que sigue apunta a que los niños puedan atrapar la idea de que, en un triángulo, al conocer dos ángulos, el tercero queda delimitado por los otros dos, es decir, depende de la amplitud de los otros.

5) Este problema es para resolver de a dos:

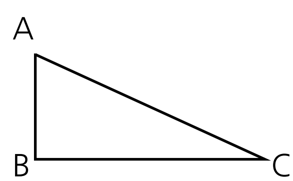
En la ilustración que puede verse más abajo hay un triángulo al que se le ha borrado uno de sus ángulos. Lo que ustedes tienen que hacer es encontrar cuál o cuáles de los ángulos que se ofrecen permiten reconstruir el triángulo (pueden calcar los ángulos).



6)
a) Considerá el dibujo del problema anterior. ¿Habrá otros ángulos (de diferente medida que los dados) que "calcen" en el dibujo para armar el triángulo?

b) Analicen si pueden encontrar un dibujo parecido al del problema anterior (es decir, un dibujo en el que se dan dos ángulos de un triángulo y falta el tercero) en el que calcen ángulos de diferentes medidas para armar el triángulo.
Discutan qué conclusiones pueden establecer a partir de estas dos últimas actividades.

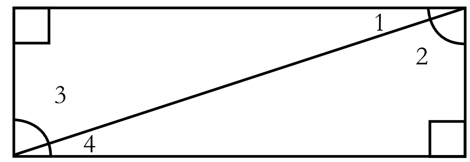
7) Este problema es para resolver en grupo:
Recordá que un triángulo rectángulo es un triángulo que tiene un ángulo recto, como por ejemplo el que muestra la siguiente figura:



El ángulo que tiene vértice en B es recto.

Analicen si siempre es posible armar un rectángulo a partir de dos triángulos rectángulos iguales.

El análisis que realizaron para resolver el problema anterior nos permite encontrar una manera de calcular la suma de los ángulos interiores de un triángulo rectángulo.



Es posible pensar esta cuestión de la siguiente manera:
Si nombramos a los ángulos con números, como indica la figura, podemos establecer que:
1 + 2 = 90º y que
3 + 4 = 90º

Pero resulta que, como los dos triángulos son iguales, sabemos que el ángulo 2 es igual al ángulo 3 y que 1 es igual al 4.
Así que, en la suma que escribimos más arriba, vamos a reemplazar del siguiente modo:
1 + ~~2~~ 3 = 90º
~~3~~ 2 + 4 = 90º

Por lo tanto, la suma de los ángulos 2 y 4 del triángulo rectángulo da 90º. Lo mismo ocurre con la suma de los ángulos 1 y 3.

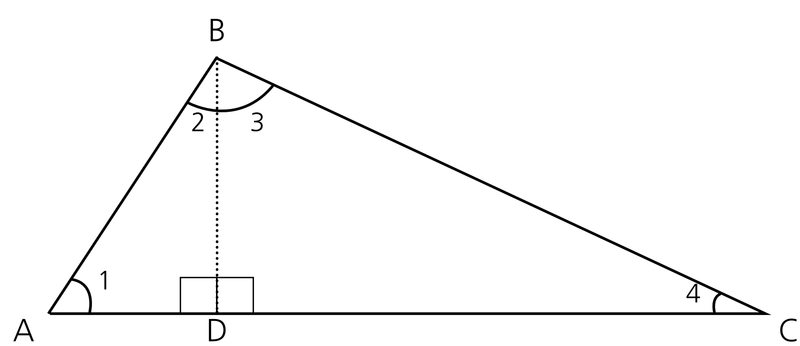
Entonces es posible saber cuánto es la suma de todos los ángulos interiores de un triángulo rectángulo:

$$\underbrace{\text{Ángulo 2 + ángulo 4}}_{90º} \quad + \quad 90º \text{ del ángulo recto del triángulo} = 180º$$

Podemos estar seguros de que esta propiedad se cumple para todos los triángulos rectángulos, pero ¿qué sucede si los triángulos no son rectángulos?

Cualquier triángulo puede “descomponerse” en dos triángulos rectángulos. Por ejemplo, analicemos el siguiente caso:

El triángulo ABC puede descomponerse en dos triángulos rectángulos: ABD y BDC.



Entonces podemos decir que:
1 + 2 = 90º
y que
3 + 4 = 90º
Entonces la suma de todos los ángulos del triángulo da 180º porque:

$\underbrace{1 + 2} + \underbrace{3 + 4} = 180^\circ$

$90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

A partir de este análisis podemos decir que:
La suma de los ángulos interiores de todos los triángulos es de 180º.

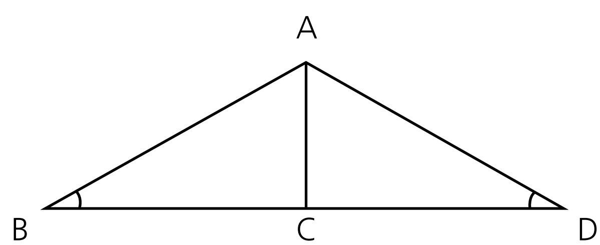
Actividad **4**

CLASIFICACIÓN DE TRIÁNGULOS

Material para el alumno (2° bimestre, página 93)

Ya vimos que, cuando un triángulo tiene un ángulo recto, se llama rectángulo; cuando tiene un ángulo obtuso, se llama obtusángulo y cuando tiene todos sus ángulos agudos, acutángulo.

Con dos triángulos rectángulos iguales se puede armar también un triángulo que tiene dos de sus lados iguales. Una posibilidad se muestra en la siguiente figura:



En el triángulo ABD, los segmentos AB y AD son iguales y también son iguales los ángulos que tienen vértice en B y en D porque ambos son en realidad el mismo ángulo del triángulo ACD.

En el triángulo isósceles que dibujamos (ABD) se cumple que a los lados que son congruentes les corresponden ángulos congruentes.

Cuestión
Investiguen si esta propiedad se cumple en todos los triángulos isósceles. ¿Cómo podrían justificarlo?

1) Investiguen también si se forma un triángulo isósceles si se hace coincidir el lado bc de uno de los triángulos rectángulos anteriores con el lado cd del otro triángulo rectángulo. ¿Se cumple aquí también que a lados congruentes les corresponden ángulos congruentes?

Cuestión
Analicen la siguiente afirmación:
"En todo triángulo isósceles, si se conoce la medida de uno de sus ángulos y se informa si es uno de los ángulos iguales o no, se puede calcular la medida de todos los ángulos."

2) Se sabe que los tres ángulos de un triángulo equilátero tienen la misma medida, ¿cuál será? ¿Todos los ángulos de los triángulos equiláteros miden lo mismo?

3) Utilizando dos triángulos rectángulos congruentes, ¿podrían armar un triángulo que tenga sus tres lados de diferentes medidas?

En el siguiente problema hay triángulos que no pueden construirse; éste es el caso, por ejemplo, de un triángulo obtusángulo y rectángulo. La intención de proponer este ejercicio es que no se agote en el hecho de que los niños comprueben que es o no posible la construcción porque no "se cierran" los lados, sino que se pueda avanzar en las posibilidades de argumentación. Es decir, en formular razones por las cuales algunos triángulos no existen. Esperamos entonces que circulen reflexiones del tipo: *Un obtusángulo rectángulo no puede ser porque ya tenés un ángulo de 90º más otro que mide más que 90º, así que ya tenés más de 180º que es más que la suma de los ángulos interiores*, o *Un triángulo no puede tener dos ángulos rectos porque ya suman 180º, entonces tampoco puede tener un ángulo recto y uno obtuso, etcétera*.

4) Dibujen un triángulo que cumpla las condiciones que en cada caso se indican:
a) isósceles y rectángulo
b) isósceles y acutángulo
c) rectángulo y escaleno
d) equilátero y obtusángulo
e) obtusángulo y rectángulo

¿En qué casos es imposible construir el triángulo?

5) Decidan si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- No existen los triángulos que tengan dos ángulos rectos porque si la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180º, dos ángulos rectos ya suman 180º, entonces el tercer ángulo tendría que medir 0º.

- Si en un triángulo hay un ángulo obtuso, “ya se utilizaron” más de 90º, entonces es seguro que los otros dos ángulos son agudos e iguales.

- Si un triángulo tiene un ángulo obtuso es seguro que no tiene un ángulo recto porque el ángulo obtuso tiene más de 90º y el recto tiene 90º, entonces con esos dos ángulos ya se obtendría más de 180º, que es la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

- Si en un triángulo hay un ángulo de 60º, entonces es seguro que ese triángulo es equilátero porque todos los equiláteros tienen ángulos de 60º.

- No pueden existir los triángulos isósceles rectángulos porque si es isósceles debe tener dos ángulos iguales y, si el triángulo es rectángulo, significa que tiene ángulos rectos. Como un triángulo no puede tener dos ángulos rectos, entonces los isósceles rectángulos no se pueden construir.

- Todos los triángulos tienen siempre un ángulo agudo. Eso significa que en todo triángulo la suma de los otros dos ángulos siempre tiene que dar más de 90º.

PROBLEMAS DE RECAPITULACIÓN

Material para el alumno (2º bimestre, página 98)

1) Pinten de azul todos los puntos que están al mismo tiempo a más de 4 cm y a menos de 5 cm del punto F.

F x

2) Pinten todos los puntos que están a más de 3 cm de M y a menos de 5 cm de S.

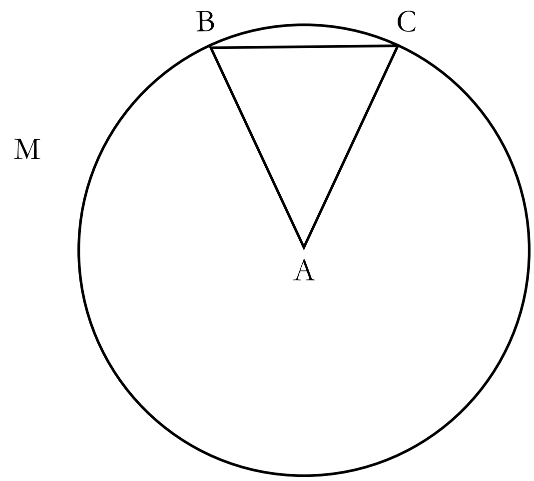
M x S x

3) Pinten todos los puntos que están al mismo tiempo a menos de 4 cm de A y a más de 5 cm de D.

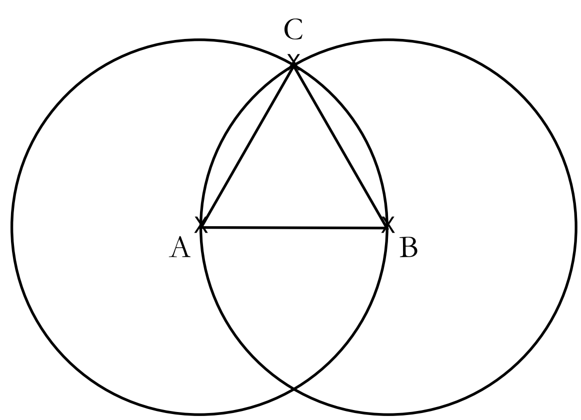
A x D x

4) Construyan un triángulo isósceles cuyos lados congruentes midan 5 cm y el tercer lado mida 4 cm.

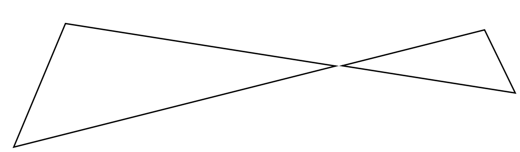
5) Te dan como información que M es una circunferencia, A su centro y B y C, puntos de la circunferencia. ¿Es posible estar seguro, sin medir, de que el triángulo ABC es equilátero? ¿Es posible estar seguro de que es isósceles? ¿Por qué?



6) Se sabe que el radio de la circunferencia con centro en A es el mismo que el de la circunferencia con centro en B. Decidí si se puede estar seguro de que ABC es equilátero.



7) Copien, sin calcar, una figura igual a la siguiente. Pueden usar los instrumentos de Geometría que crean conveniente.



8) Respondan las siguientes preguntas:
a) ¿Puede haber un triángulo isósceles que tenga un solo ángulo de 60º?
b) ¿Existe un triángulo equilátero que tenga ángulos de 45º?
c) ¿Puede haber un triángulo isósceles que tenga dos ángulos interiores de 100º? ¿Cuánto medirá el tercer ángulo?
d) ¿Puede existir un triángulo que sea equilátero y que tenga un ángulo recto?
e) ¿Existen los triángulos rectángulos equiláteros?
f) ¿Es cierto que los triángulos isósceles sólo pueden tener todos sus ángulos agudos?

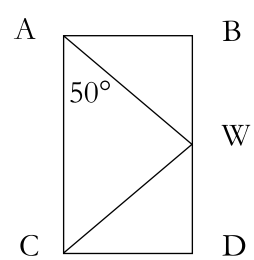
9) Construí los siguientes triángulos, pero, antes de realizar la construcción, decidí si existen o no a partir de las medidas de sus lados.
Un lado de 3 cm, un lado de 5 cm y un lado de 7 cm.
Un lado de 3 cm, un lado de 4 cm y un lado de 2 cm.
Un lado de 5 cm, un lado de 2 cm y un lado de 7 cm.
Un lado de 4 cm, un lado de 5 cm y un lado de 3 cm.

10) Decidí si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

Si se tienen como datos las medidas de los tres lados de un triángulo, todos los triángulos que se construyan con esas medidas, serán iguales.

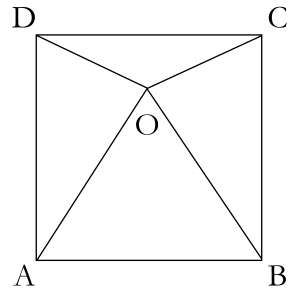
Si se tienen como datos las medidas de dos lados de un triángulo, todos los triángulos que se construyan con esas medidas, serán iguales.

11) En el rectángulo ABCD se ha marcado el punto medio de BD llamándolo W. Calculen el valor de todos los ángulos cuya medida se puede deducir a partir de los datos dados.



Este problema plantea la necesidad de establecer relaciones que deben ser respondidas, armando una pequeña cadena deductiva: los triángulos BAW y WCD son triángulos rectángulos con sus catetos iguales (AB = CD y BW = WD). Esto permite establecer que los ángulos BAW y WCD son iguales. Como BAW mide 40° por ser el complemento de un ángulo de 50°, WCD también mide 40°. Resulta entonces que ACW mide 50°. De aquí se deduce que el ángulo AWC mide 80°.

12) ABCD es un cuadrado. AOB es un triángulo equilátero. En esta figura es posible determinar la medida de varios ángulos que allí aparecen, sin necesidad de recurrir al transportador. ¿Podrían decir de cuáles?



13) Utilizando sólo compás y regla no graduada, construyan un ángulo de 60º. Luego compruébenlo con el transportador.

CUADRILÁTEROS

Actividad 1

RETOMANDO ALGUNAS CARACTERÍSTICAS YA ESTUDIADAS SOBRE TRIÁNGULOS

Material para el alumno (3° bimestre, página 62)

1) Primera parte:

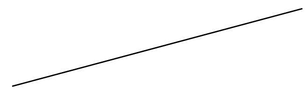
Ustedes ya trabajaron con triángulos.
Les proponemos ahora que revisen nuevamente sus materiales y que traten de identificar qué características reúnen los triángulos:
a) isósceles,
b) equiláteros y
c) escalenos.

Busquen también qué características tienen los triángulos:
a) acutángulos,
b) rectángulos y
c) obtusángulos.

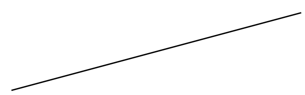
Segunda parte:

A partir del trabajo anterior, construyan:

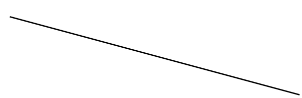
a) Un triángulo isósceles rectángulo, utilizando compás y regla no graduada y sabiendo que éste es uno de los lados iguales.



b) Un triángulo escaleno obtusángulo, utilizando compás y regla no graduada y sabiendo que éste es uno de los lados. ¿Cuántos triángulos distintos se pueden construir?



c) Un triángulo isósceles acutángulo, utilizando escuadra no graduada y compás y sabiendo que éste es el lado no igual del triángulo. ¿Cuántos triángulos distintos se pueden construir?

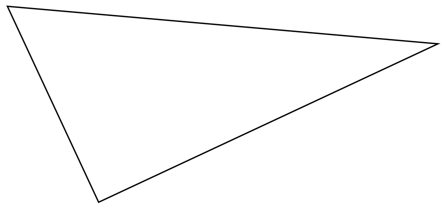


Actividad **2**

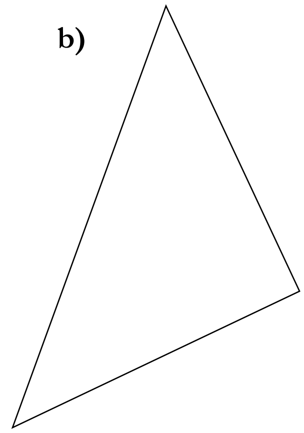
UTILIZANDO TRIÁNGULOS PARA INVESTIGAR CUADRILÁTEROS

1) En la siguiente ilustración hay varios triángulos distintos. Utilizando compás y transportador determinen qué tipo de triángulo es cada uno de ellos a partir de sus ángulos y sus lados. (Por ejemplo: isósceles acutángulo, etcétera.)

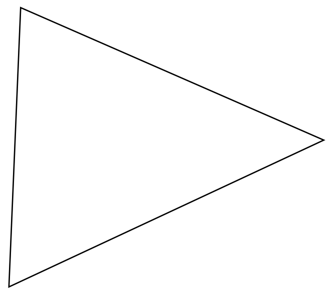
a)



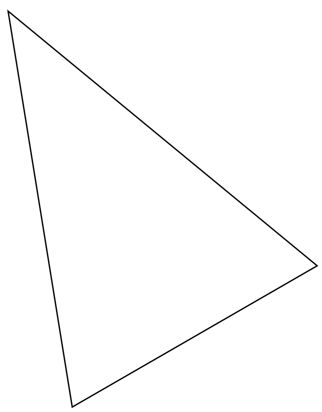
b)



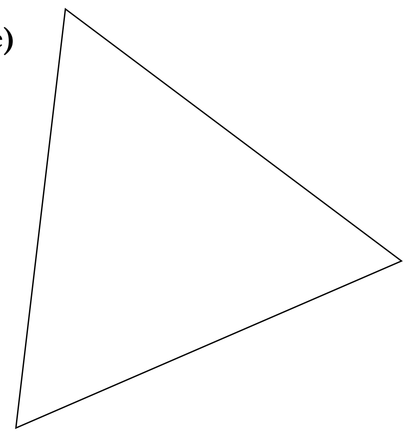
c)



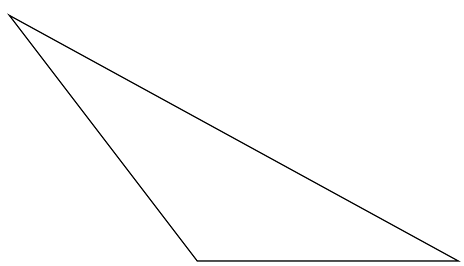
d)



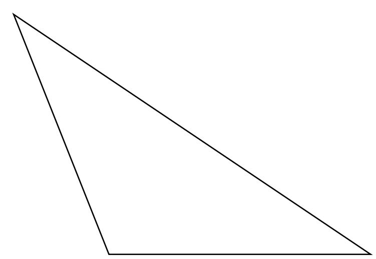
e)



f)



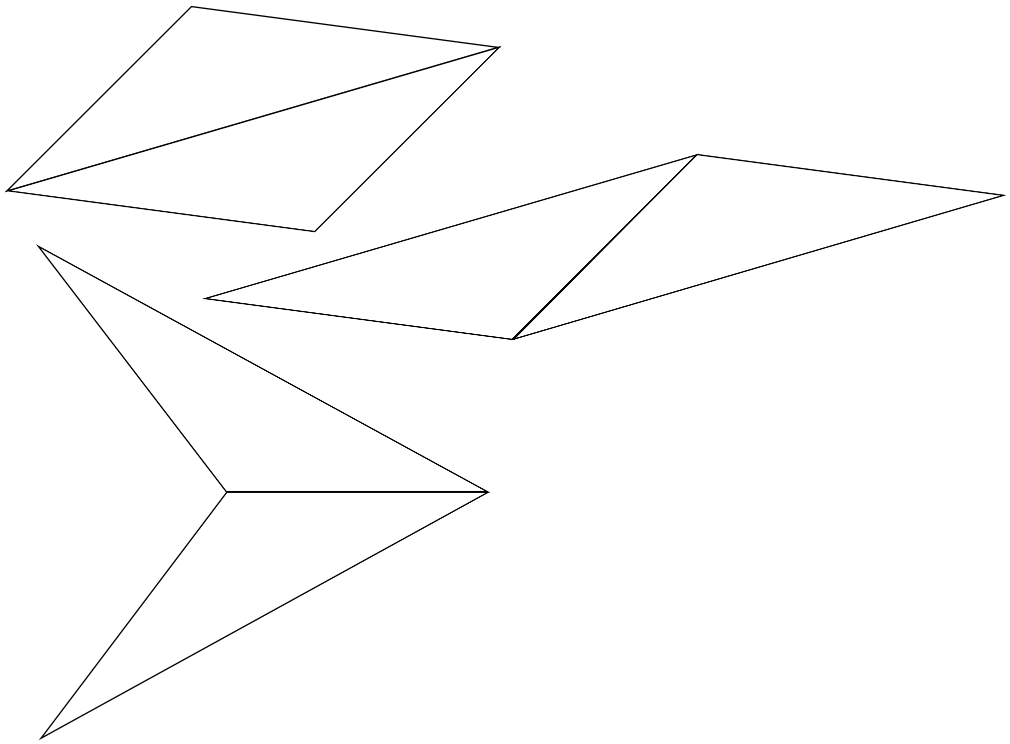
g)



2) Calquen dos veces cada uno de los triángulos y recórtenlos.

a) Tomen dos triángulos iguales que en el ejercicio anterior fueron indicados con la letra f. Juntando los dos triángulos de manera que coincidan los lados iguales se pueden formar diferentes figuras.

Por ejemplo:

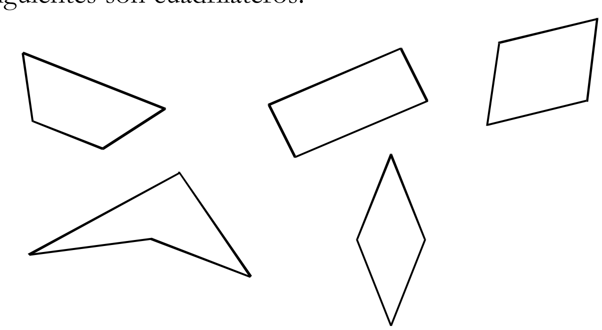


Dibujen todos las figuras que puedan armar.

Seguramente armaron seis figuras de cuatro lados cada una. Esas figuras se llaman cuadriláteros.

Recordá
Las figuras limitadas por cuatro segmentos se llaman cuadriláteros.

Los siguientes son cuadriláteros:



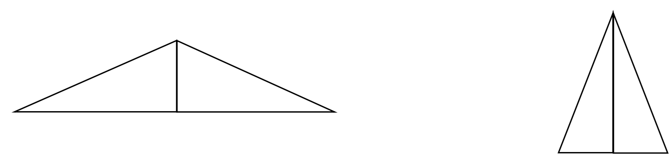
b) Repitan el procedimiento de armar figuras con dos triángulos iguales, con todos los pares de triángulos iguales que calcaron. Investiguen qué figuras se pueden armar.

c) Decidan si son ciertas las siguientes afirmaciones:

- Utilizando dos triángulos iguales siempre es posible armar un cuadrilátero.

- Utilizando dos triángulos iguales siempre es posible armar seis cuadriláteros distintos.

La primera de estas dos afirmaciones es cierta. La segunda de ellas es parcialmente cierta. Efectivamente, si, por ejemplo, se trabajara con triángulos rectángulos, ocurre que, al unirlos "en espejo" por los catetos, se forman triángulos isósceles como muestra la ilustración:



Si en cambio, se los une por los catetos pero "invirtiendo" los triángulos, se forman rectángulos.

d) De las figuras que armaron, algunas tienen los dos pares de lados opuestos iguales y otras no. Clasifíquenlas según ese criterio.

Recordá Los cuadriláteros que tienen los dos pares de lados opuestos iguales se llaman paralelogramos.

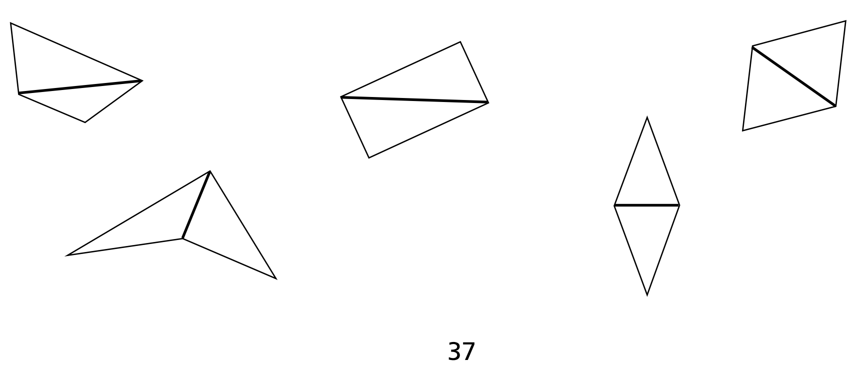
Se habrán dado cuenta de que los lados opuestos también son paralelos. De ahí el nombre de paralelogramos.

Actividad 3

SUMA DE LOS ÁNGULOS INTERIORES DE UN CUADRILÁTERO

Material para el alumno (3° bimestre, página 69)

Un cuadrilátero siempre se puede descomponer en dos triángulos.



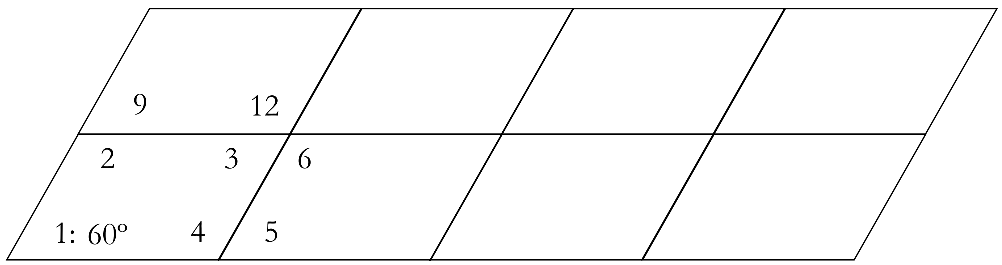
Ya estudiaron que la suma de los ángulos interiores de los triángulos es de 180º. Ahora están en condiciones de establecer el valor de la suma de los ángulos interiores de los cuadriláteros. ¿Cuál es ese valor?

Actividad 4

LOS ÁNGULOS DEL PARALELOGRAMO

Material para el alumno (3º bimestre, página 70)

Lucía armó un embaldosado utilizando paralelogramos todos iguales, como se presenta en el siguiente dibujo:



Al analizar lo que había armado se dijo: "En un paralelogramo, si se sabe el valor de un ángulo se saben todos los demás".

Sabemos que tiene razón, pero ¿cómo habrá hecho para calcular el valor de todos los ángulos de un mismo paralelogramo?

Una forma de resolver el problema anterior es pensar que:
1 = 5 porque es el mismo ángulo en los dos paralelogramos que son iguales.
4 + 5 = 180º. Como 1 = 5, entonces
4 + ~~5~~ 1 = 180º

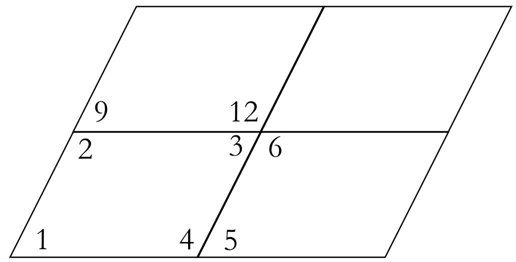
El mismo razonamiento puede hacerse para los ángulos 2 y 3.
3 + 6 = 180º
6 = 2 porque es el mismo ángulo en los dos paralelogramos que son iguales.
Entonces 3 + ~~6~~ 2 = 180

Podría procederse de la misma manera para demostrar que 1 + 2 = 180º y que 3 + 4 = 180º, con lo que quedaría establecido que, en un paralelogramo, los ángulos consecutivos suman 180º. Esta propiedad es el "asunto" del problema anterior y, en ese sentido, es conveniente que quede resaltada en la carpeta de los niños.

También debe establecerse que los ángulos opuestos son iguales.

Una forma de demostrar esta afirmación puede ser:
1 = 9 porque es el mismo ángulo en los dos paralelogramos que son iguales.
9 + 2 = 180º

3 + 2 =180º porque son ángulos consecutivos y se ha establecido que suman 180º. Entonces 9 + 2 = 3 + 2 = 180º, así que 9 = 3. Y como 9 = 1, entonces 3 = 1.



Posiblemente el maestro deba ayudar a los niños a completar los razonamientos que realicen para argumentar sobre las propiedades que se están estudiando.

Actividad **5**

LOS ÁNGULOS DE ALGUNOS PARALELOGRAMOS ESPECIALES

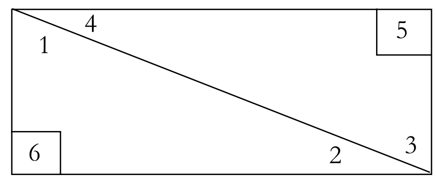
Material para el alumno (3º bimestre, página 70)

1) Un paralelogramo que además tiene sus ángulos rectos es un rectángulo. Si tuvieran que armar uno con dos triángulos iguales, ¿cuál de los que aparecen en la actividad 2 elegirían? ¿Hay una única opción?
Comprueben su decisión armando el rectángulo.
2) Un paralelogramo que además de tener sus ángulos rectos también tiene sus cuatro lados iguales es un cuadrado. Si tuvieran que armar uno con dos triángulos iguales, ¿cuál de los que aparecen en la actividad 2 elegirían? ¿Hay una única opción?
Comprueben su decisión construyendo el cuadrado.

Estamos pensando en una gestión de estos dos problemas de modo que el maestro primero les pide a los niños que busquen razones para decidir cuál o cuáles de los triángulos elegirían y luego les propone que esta anticipación sea comprobada con la construcción efectiva. Posiblemente los niños no tengan dificultad en identificar que necesitan triángulos rectángulos isósceles y/o escalenos en el caso del rectángulo e isósceles solamente para armar el cuadrado, pero sí la tengan en encontrar maneras de demostrar que la figura armada es la solicitada. Es posible que estas formas de demostrar se apoyen en que “queda” un rectángulo o un cuadrado y que los argumentos estén muy vinculados a “lo que puede verse” y no a las razones por las cuales necesariamente lo que se va a armar sea la figura pedida.

Creemos que a pesar de esta complejidad vale la pena que la actividad sea sostenida por el docente. Una forma posible de sostener la propuesta es presentar a los niños una argumentación respecto del rectángulo y proponerles que traten de utilizar ese razonamiento para justificar si la siguiente figura armada es o no un cuadrado. Para resolver este problema se puede apelar al razonamiento realizado a propósito de la suma de los ángulos interiores de los triángulos y plantear una argumentación en los siguientes términos:

Si se tienen dos triángulos isósceles rectángulos iguales, se forma un rectángulo porque los dos pares de lados opuestos son iguales y:
el ángulo 5 = ángulo 6 = 90º porque son triángulos rectángulos y el ángulo 1 = ángulo 3 porque son el mismo ángulo en los dos triángulos y el ángulo 2 = ángulo 4 porque son el mismo ángulo en los dos triángulos.



Ya se sabe que 6 + 1 + 2 = 180º y como 6 = 90º, entonces 1 + 2 = 90º.
Como 2 = 4, entonces 1 + 4 = 90º. Por lo tanto ese ángulo es recto.
El mismo razonamiento podría hacerse respecto de 2 + 3. Así que los cuatro ángulos son rectos.

Sabemos que es muy posible que los niños no recurran a estas estrategias para argumentar o no formulen este razonamiento de manera completa o del todo ajustada. Sin embargo, el esfuerzo para los niños y para el maestro bien vale lo que cuesta, ya que junto con las propiedades específicas que se quieren estudiar, se está comunicando una práctica particular, un modo de producir relaciones, característico de la matemática. En definitiva, se está informando a los niños un "cómo hacer" perteneciente a la geometría. Será necesario realizar –y ésa es una intención que recorre todo este material de geometría– un conjunto de actividades a lo largo del año que les permita a los niños reconocer lo que se les está pidiendo, como también poner en juego aquello de lo que están intentando apropiarse.

3) Utilicen los triángulos equiláteros recortados.

a) Formen cuadriláteros utilizando los dos triángulos recortados.
¿Cuántos cuadriláteros distintos pueden armar? Busquen argumentos para establecer que las figuras armadas son o no cuadriláteros distintos.

En este problema se puede comprobar que siempre se obtiene el mismo cuadrilátero al "juntar" los triángulos por los diferentes lados. Se podrá establecer que los lados son siempre iguales, los ángulos son iguales, etcétera.

b) Con los mismos triángulos, intenten formar un paralelogramo que no tenga sus cuatro lados iguales.

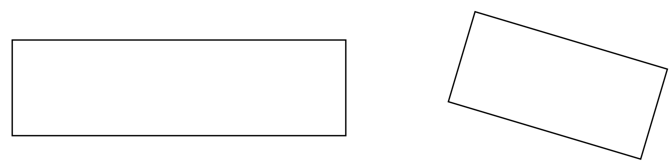
Aquí también se espera que los niños establezcan que no se puede, no sólo desde lo empírico sino más que nada desde la idea de que si los lados son todos iguales porque son dos triángulos equiláteros iguales, entonces es imposible armar un cuadrilátero de lados distintos.

c) Ustedes ya determinaron que el cuadrilátero que armaron es un paralelogramo, que no se pueden armar dos distintos utilizando estos triángulos y que los lados son todos iguales. Entonces, como es un paralelogramo y todos sus lados son iguales, se podría afirmar que la figura que armaron es un cuadrado. ¿Es correcta esta afirmación? Si la respuesta es sí expliquen por qué y si es no, lean el siguiente recuadro y determinen de qué cuadriláteros de los que allí se presenta se trata.

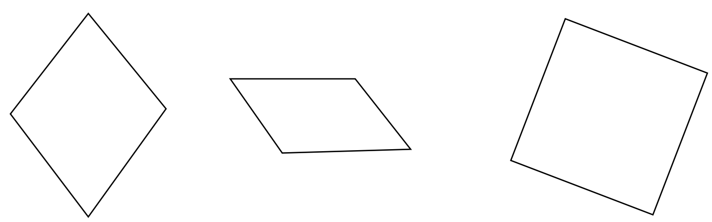
Lean la siguiente información:

Los siguientes dibujos representan todos paralelogramos porque tienen dos pares de lados opuestos iguales. También vimos que en los paralelogramos los dos pares de lados opuestos son paralelos. A partir de las relaciones entre sus lados y sus ángulos reciben diferentes nombres.

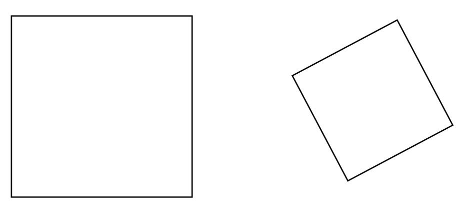
Rectángulos: tienen los cuatro ángulos rectos.



Rombos: tienen los cuatro lados iguales.



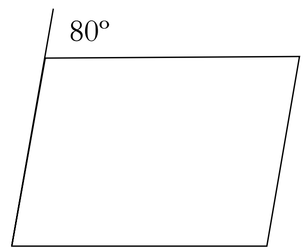
Cuadrados: tienen los cuatro lados iguales y los cuatro ángulos rectos.



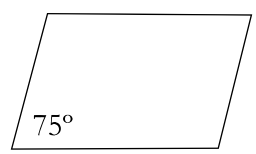
Actividad **6** **PROBLEMAS PARA REVISAR LO QUE HICIMOS:**

Material para el alumno (3° bimestre, página 73)

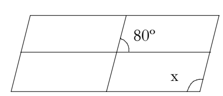
1) Calculen el valor de cada uno de los ángulos interiores de este paralelogramo.



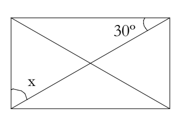
2) En el siguiente paralelogramo se sabe que uno de sus ángulos mide 75º. Calculen la medida de todos los demás.



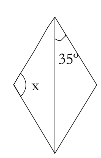
3) Calculen sin medir el ángulo indicado en cada caso con una X. Justifiquen cómo se obtuvo.



Paralelogramo

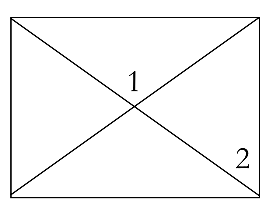


Rectángulo

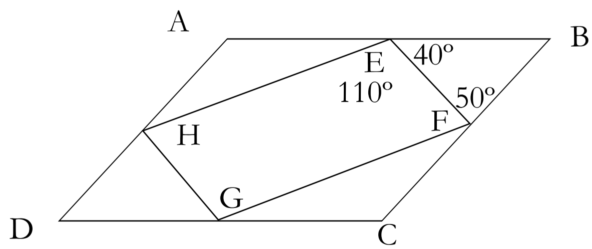


Rombo

4) En el siguiente rectángulo, el ángulo 1 mide 110º. Calculen la medida del ángulo 2.



5) La siguiente figura está compuesta por el paralelogramo abcd que tiene en su interior al paralelogramo EFGH. Los vértices E, F, G y H son los puntos medios de los lados del ABCD.
A partir de la información de la medida de uno de los ángulos que aparece en la figura, calculen la medida de todos los demás ángulos.

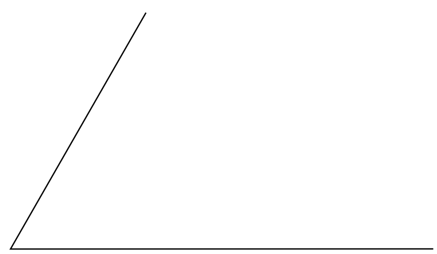


Actividad **7**

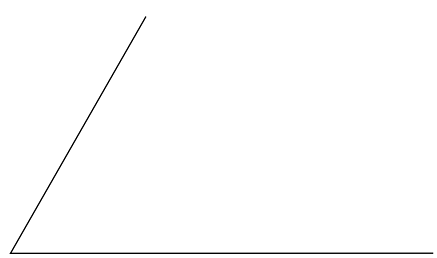
Construcciones de paralelogramos

Material para el alumno (3° bimestre, página 74)

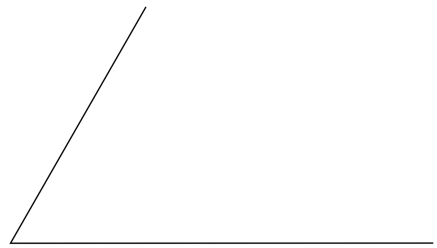
1) Éstos son dos lados consecutivos de un paralelogramo.
Completen el paralelogramo utilizando regla y escuadra.



2) Estos son dos lados consecutivos de un paralelogramo.
Completen el paralelogramo utilizando compás y regla no graduada.



3) Estos son dos lados consecutivos de un paralelogramo. Se sabe que el ángulo mide 60º. Completen el paralelogramo utilizando transportador y regla no graduada. ¿Cuántas respuestas tiene este problema?



Podrá notarse que en los tres problemas anteriores, los lados dibujados tienen la misma medida. Con lo que aparentemente se trata del mismo problema. Sin embargo, en cada caso se ha habilitado el uso de un instrumento diferente: regla y escuadra para el primero, compás y regla no graduada para el segundo, y transportador y regla no graduada para el tercero (además de incorporar el dato del ángulo que forman los lados).
Al habilitar uno u otro instrumento se "pone el foco" en una propiedad diferente de la misma figura en cada uno de los casos.
Así, si se permite la regla y la escuadra para la construcción, el análisis seguramente gire en torno del paralelismo de los lados ya que para construir el paralelogramo deberán trazarse paralelas. Si, en cambio, se utiliza compás y regla no graduada, el análisis estará en torno de que se han garantizado que los lados opuestos tienen la misma longitud, etcétera.
Las construcciones, entonces, como puede notarse, no están pensadas como una secuencia ordenada de pasos que los niños deben seguir, sino como una oportunidad de explorar, establecer y utilizar las propiedades de las figuras con las que se está trabajando.

> **4)** Sabiendo que los dos segmentos dibujados son los lados de un paralelogramo, constrúyanlo utilizando regla no graduada y compás. ¿Cuántas respuestas tiene este problema?

Este problema aporta una cuestión que resulta compleja para los niños. Para que puedan realizar la construcción deberán asignar un valor arbitrario al ángulo del paralelogramo. En los casos anteriores el valor del ángulo ya estaba determinado en la figura. Es así como se pueden construir infinitos paralelogramos diferentes con los datos dados.

> **5)** Construyan un paralelogramo que tenga un lado de 7 cm y otro de 5 cm. ¿Cuántas respuestas tiene este problema?
>
> **6)** Utilizando los instrumentos de geometría que necesites, construí un paralelogramo que tenga un lado de 7 cm, otro de 5 cm y el ángulo que forman esos lados sea de 40º ¿Cuántas respuestas tiene este problema?

7) Utilizando los instrumentos de geometría que necesiten, construyan un paralelogramo que tenga un lado de 7 cm, otro de 5 cm y una diagonal de 9 cm. ¿Cuántas respuestas tiene este problema?

8) Utilizando los instrumentos de geometría que necesiten, construyan un paralelogramo que tenga un lado de 7 cm, una diagonal de 9 cm y que el ángulo que forma esa diagonal con el lado sea de 40º. ¿Cuántas respuestas tiene este problema?

Estos problemas permiten analizar con los niños cuáles son las informaciones mínimas que definen un único paralelogramo. Así, por ejemplo, si se conocen dos lados consecutivos y el ángulo que forman esos lados, existe un único paralelogramo que cumple con esas condiciones. Lo mismo ocurre si se tienen como datos los dos lados consecutivos y la diagonal, como en el problema 7 o, un lado, la diagonal y el ángulo que esa diagonal forma con el lado, como en el problema 8.
Es importante "pasar en limpio" estas conclusiones con los niños, es decir que la actividad permite avanzar hacia cierto grado de generalización (aunque no exhaustivamente porque existen otras ternas de datos que permiten definir un único paralelogramo).

Actividad **8**

DIAGONALES DE LOS PARALELOGRAMOS[4]

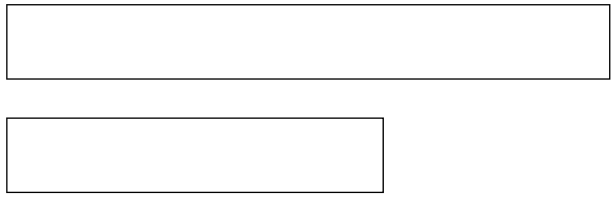
El objetivo de la primera parte de esta actividad es que los niños exploren las características de las diagonales de todos los paralelogramos presentados.
Las diagonales pueden ser iguales (como en un cuadrado) o no (como en un rombo). Se pueden cortar perpendicularmente (como en el cuadrado) o no (como en el rectángulo). Y se pueden cortar en el punto medio de ambas (como en el rombo), en el punto medio de sólo una de ellas (como en el romboide), o en cualquiera de sus puntos (como en el trapecio).
Estas tres variables, entonces, determinan las características de las diagonales de un cuadrilátero: la longitud de cada una de ellas, el punto de cruce de ambas y el ángulo que forman al cortarse. La combinación de estas tres variables da 12 posibilidades, pero existen algunas que se superponen[5].

Material para el alumno (3° bimestre, página 77)

Esta actividad es para realizar de a dos.

Primera parte:
Calquen dos veces cada una de las dos tiras que se presentan a continuación y recórtenlas. Tomen dos de esas cuatro tiras e investiguen cuáles de los paralelogramos que se presentaron en la lámina de más arriba se forma si las tiras son las diagonales.

[4] Actividad adaptada de Broitman, C. e Itzcovich, H. (1992): *Taller de resolución de problemas.* Secretaría de Educación y Cultura, Dirección de Currícula, GCBA.
[5] Por ejemplo, es posible construir rectángulos con dos diagonales cortas o dos largas. La única condición es que ambas tengan la misma longitud.



Para acordarse qué figuras se formaron, deben ir dibujándolas en una hoja aparte. Repitan el mismo procedimiento cambiando de diagonales

Para organizar la exploración el maestro puede ejemplificar con dos tiras y dibujarlas en el pizarrón. Debe quedar claro que las tiras no son los lados, sino las diagonales. Es importante que los niños elaboren una anotación organizada de la exploración que van a realizar y expliciten la forma en la que han relacionado las diagonales, como un primer registro. Por ejemplo, que anoten TL o TC en los cuadriláteros que arman si utilizan tiras largas o cortas, respectivamente.
En esta primera etapa no se presentan las tres variables ni se indica un orden específico para avanzar en la exploración. Se espera que los alumnos descubran cuáles son estas variables.

Segunda parte:
A partir de la investigación que realizaron, decidan cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

- Si se usan dos diagonales siempre se obtiene un cuadrilátero.
- Si las diagonales son iguales, se cortan en el punto medio de ambas y el ángulo que forman no es recto, se forma un rectángulo.
- Si las diagonales son distintas, se cortan en el punto medio de ambas y el ángulo que forman es recto, se forma un cuadrado.
- Si las diagonales son iguales, es posible que se arme un paralelogramo determinado, dependiendo del ángulo que formen al cortarse.
- Si se usan dos diagonales distintas es posible que se forme un rombo dependiendo del ángulo que formen al cortarse y del punto donde cada diagonal corta a la otra.

En un momento de trabajo colectivo, a partir de analizar si las afirmaciones son verdaderas o falsas, se buscan similitudes y diferencias entre los cuadriláteros que los niños han dibujado. Se intenta que aparezcan las tres variables: tamaño, forma y punto de corte a partir de analizar que esas son las condiciones que se plantean en las afirmaciones.

Tercera parte: Atando cabos

a) Para ordenar la información vuelvan a la lámina de paralelogramos que aparece más arriba y describan a cada uno de ellos a partir de las características de sus diagonales.

b) Respondan las siguientes preguntas:

¿Cuáles son todos los cuadriláteros que tienen sus dos diagonales iguales?
¿Qué cuadriláteros tienen diagonales que se cortan formando ángulos rectos?
¿Es posible encontrar rectángulos que tengan diagonales que se corten en el punto medio de ambas, formen ángulos rectos al cortarse y que sean de distinta longitud una de otra?
¿En qué se diferencian las diagonales de un cuadrado de las de un rectángulo?
¿Cuáles de todos los paralelogramos que aparecen en la lámina tienen diagonales que se cortan en el punto medio de ambas?

Actividad **9**

CONSTRUCCIONES DE PARALELOGRAMOS A PARTIR DE SUS DIAGONALES

Material para el alumno (3° bimestre, página 79)

1) La siguiente es la diagonal de un paralelogramo. Se sabe que la otra diagonal mide 3 cm. Utilizando regla graduada y compás, construyan el paralelogramo. ¿Cuántas respuestas tiene este problema?

2) Utilizando los instrumentos de geometría que necesiten, construyan un paralelogramo sabiendo que los siguientes segmentos son sus diagonales y que al cortarse forman un ángulo de 60º. ¿Cuántas respuestas tiene este problema?

3) En la siguiente figura, el segmento más largo es la diagonal y el más corto, uno de los lados de un paralelogramo. Utilizando regla graduada construyan el paralelogramo. ¿Cuántas respuestas tiene este problema?

4) En el siguiente dibujo puede verse la mitad de las dos diagonales de un paralelogramo. Utilizando regla no graduada y compás construyan el paralelogramo.

PROBLEMAS DE RECAPITULACIÓN:

Material para el alumno (3° bimestre, página 81)

1) Decidan, sin armarlo, si es posible construir un rombo utilizando dos triángulos escalenos rectángulos. ¿Qué argumentos pueden utilizar para dar su respuesta?

2) Utilizando dos triángulos isósceles rectángulos iguales al que aparece en la actividad 2, se puede construir un cuadrado. ¿Será posible construir un cuadrado con dos triángulos isósceles rectángulos iguales entre sí pero mucho más grandes? ¿Y mucho más chicos? ¿Con qué argumentos podrían justificar su respuesta?

3) Decidan si es posible armar un rectángulo utilizando dos triángulos iguales cualesquiera que no sean rectángulos.

4) Discutan si es posible armar un rombo utilizando dos triángulos iguales que no tengan ángulos obtusos.

5)
a) Lean todas las actividades y conclusiones a partir del título "Utilizando triángulos para investigar cuadriláteros".

Hagan una lista de todo lo que hayan aprendido hasta aquí sobre los ángulos interiores de los cuadriláteros.

b) Teniendo en cuenta la lista que elaboraron en el problema anterior, decidan si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En cada caso deben explicar cómo pensaron para tomar su decisión.

· Si un cuadrilátero tiene por lo menos un ángulo obtuso, entonces la suma de los ángulos interiores de ese cuadrilátero no puede ser de 360º.

· No es posible saber cuál es la suma de los ángulos interiores de los paralelogramos si no se sabe cuál es el valor de cada uno de los ángulos de esa figura.

· Todos los cuadriláteros se pueden armar con dos triángulos que comparten un lado. Como la suma de los ángulos interiores de los dos triángulos es de 360º, entonces la suma de los ángulos interiores de cualquier cuadrilátero es de 360º.

· Si se sabe que un cuadrilátero tiene tres ángulos rectos, se puede estar seguro de que el cuarto ángulo también es recto sin necesidad de medirlo.

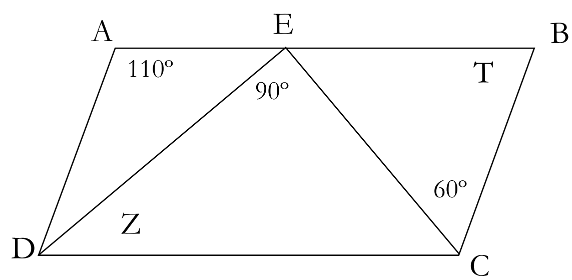
· Si un cuadrilátero está armado con dos triángulos iguales se puede estar seguro de que es un paralelogramo.

c) A partir de sus respuestas en el ejercicio b), revisen la lista que armaron para el a) y discutan si hay alguna nueva conclusión que quieran agregar a las que ya tenían.

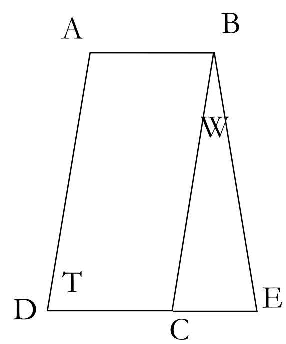
6) Dibujen un cuadrilátero que tenga dos ángulos opuestos rectos. ¿Pueden dibujar alguno que no sea paralelogramo?

7) Se sabe que un paralelogramo tiene un ángulo recto. ¿Es posible anticipar cuál va a ser la medida de los otros tres ángulos?

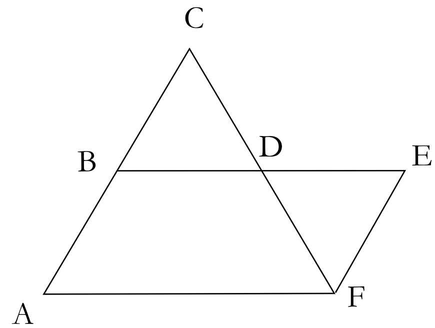
8) La siguiente figura ABCD es un paralelogramo. La letra E indica un punto del lado AB.
Calculen la amplitud de los ángulos T y Z , a partir de los datos de la figura.



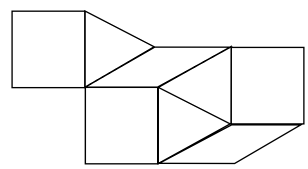
9) Calculen la medida del ángulo W sabiendo que ABCD es un paralelogramo. El triángulo ECB es isósceles donde los lados BC y BE son iguales y el ángulo T mide 80º.



10) En la figura, el triángulo BCD es equilátero. El cuadrilátero ABEF es un paralelogramo. Determinen si el triángulo DEF es equilátero o no.



11) La siguiente figura está formada por cuadrados (todos iguales), rombos (todos iguales) y triángulos equiláteros.



Analícenla y determinen, sin medir, el valor de los ángulos interiores de cada una de las figuras que componen el dibujo.

Expliquen el análisis que realizaron para determinar el valor de los ángulos.

12) El segmento dibujado es el lado de un rombo, construí ese cuadrilátero utilizando regla no graduada y compás. ¿Cuántas respuestas tiene este problema?

13) Este segmento es el lado de un cuadrado. Utilizando escuadra no graduada y compás, construí el cuadrado. ¿Cuántas respuestas tiene este problema?

14) Utilizando los instrumentos de geometría que necesites, construí un rombo sabiendo que los siguientes segmentos son sus diagonales. ¿Cuántos rombos podrías construir?

15) Este segmento es la diagonal de un rectángulo. Utilizá regla no graduada y compás para construirlo. ¿Cuántos rectángulos podrías construir?

Glosario de esta unidad

En esta sección les presentamos algunos términos y conceptos que resultan necesarios para trabajar en esta unidad.

Les proponemos que si en la clase ustedes aprenden otras definiciones u otras ideas que les parecen importantes para recordar, las escriban debajo de esta lista para que sepan dónde buscarlas cuando quieran estudiar.

Círculo: Es la superficie que queda limitada por una circunferencia. También puede definirse así: el círculo es la circunferencia y todos los puntos interiores.

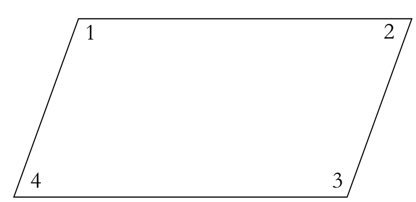
Circunferencia: Es el conjunto de puntos que equidistan de un centro.

Diámetro: Es cualquier segmento que tiene sus extremos en puntos de la circunferencia y pasa por su centro.

Propiedad triangular: En todo triángulo cada lado debe ser menor que la suma de los otros dos. Por ejemplo, si un lado mide 11, la suma de los otros dos debe ser mayor que esa medida.

Radio: Es la distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia.

Ángulos consecutivos: dos ángulos se llaman consecutivos si tienen un lado en común. Por ejemplo, en el siguiente paralelogramo 1 y 4, o 1 y 2 ; o 2 y 3 son ángulos consecutivos.
Edición: colocar los números en los ángulos



Ángulos opuestos: significa que no tienen ningún lado en común. Por ejemplo, en el paralelogramo anterior 4 y 2 son ángulos opuestos, y 1 y 3 también.

Lados paralelos: dos lados son paralelos si están siempre a la misma distancia, es decir que nunca se cortarán aunque se los alargue.